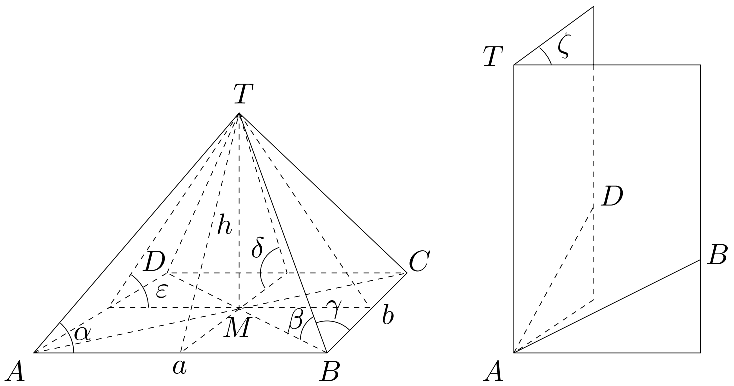
LUNDS
UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Vinklarna i en pyramid

Kjell Elfström



Den vänstra figuren ovan visar en pyramid med rektangulär bas och toppen placerad rakt ovanför basens tyngdpunkt M. Man ser omedelbart, att

$$\delta = \arctan \frac{2h}{b} \quad \text{och} \quad \varepsilon = \arctan \frac{2h}{a}.$$

Pythagoras sats ger, att

$$AM = BM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

varav det följer, att

$$\beta = \arctan \frac{2h}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Om E är mittpunkten på sidan AB, så är

$$ET = \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2},$$

varför

$$\alpha = \arctan \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{a}.$$

På samma sätt får man, att

$$\gamma = \arctan \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{b}.$$

Vinkeln ζ i den högra figuren är vinkeln mellan planen ABT och ADT. Vi inför ett ortonormerat koordinatsystem med A i origo, B på den positiva x-axeln, D på den positiva

y-axeln och z-axeln parallell med och lika riktad som MT. Då har vektorerna AB, AD och AT koordinaterna $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ respektive $(a/2, b/2, h)$. Detta ger, att

$$AT \times AB = (0, ah, -ab/2) \quad \text{och} \quad AT \times AD = (-bh, 0, ab/2).$$

Det gäller, att

$$\langle (0, ah, -ab/2), (-bh, 0, ab/2) \rangle = -\frac{a^2b^2}{4}$$

och

$$\begin{aligned} \|(0, ah, -ab/2)\|^2 \|(-bh, 0, ab/2)\|^2 &= \frac{4a^2h^2 + a^2b^2}{4} \cdot \frac{4b^2h^2 + a^2b^2}{4} \\ &= \frac{16a^2b^2h^4 + 4a^4b^2h^2 + 4a^2b^4h^2 + a^4b^4}{16} \\ &= \frac{a^2b^2(16h^4 + 4a^2h^2 + 4b^2h^2 + a^2b^2)}{16}, \end{aligned}$$

varav

$$\cos\zeta = -\frac{ab}{\sqrt{16h^4 + 4a^2h^2 + 4b^2h^2 + a^2b^2}},$$

och vi får, att

$$\zeta = \pi - \arccos\frac{ab}{\sqrt{16h^4 + 4a^2h^2 + 4b^2h^2 + a^2b^2}}.$$