LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Fråga Lund om matematik

Perfekta tal

Kjell Elfström

Delbarhet

Definition 1 Låt a och b vara heltal. Om det finns ett heltal c, sådant att $a = bc$, säger vi att b delar a och skriver $b \mid a$.

Definitionen innebär att b delar a, om kvoten $c = a/b$ är ett heltal. I fortsättningen betecknar variabler heltal, om inget annat anges.

Definition 2 Ett tal p säges vara ett primtal, om $p \geq 2$ och de enda positiva delarna till p är 1 och p.

Exempel 1 Talet 15 har de positiva delarna 1, 3, 5 och 15 och är därför inte ett primtal. Talet 11, som bara har de positiva delarna 1 och 11, är ett primtal. Talet 1 är enligt definitionen inte ett primtal, trots att den enda positiva delaren är 1.

Summor

Vi betecknar med $\sum_{k=m}^{n} a_k$ summan av talen $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$.

Exempel 2

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 56.$$

$$\sum_{k=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Med $\sum_{P(k)} a_k$ betecknar vi summan av alla tal a_k, för vilka k uppfyller påståendet $P(k)$.

Exempel 3

$$\sum_{k^2 \leq 20,\ k \geq 1} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

$$\sum_{d \mid 6,\ d \geq 1} d = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Den geometriska summan

Definition 3 En summa $\sum_{k=m}^{n} a_k$ säges vara en geometrisk summa, om det finns en reell konstant r, sådan att $a_{k+1}/a_k = r$ då $k = m, m+1, m+2, \ldots, n-1$.

Om a är den första termen i en geometrisk summa och n antalet termer, så kan den geometriska summan skrivas

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a \sum_{k=0}^{n-1} r^k.$$

Sats 1 Låt $r \neq 1$ vara ett reellt tal och n ett positivt heltal. Då är

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Bevis Beteckna summan $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ med s. Då är

$$\begin{aligned} s &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}, \\ rs &= r + r^2 + r^3 \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n. \end{aligned}$$

Subtraherar vi de övre leden från de undre, så får vi $s(r-1) = rs - s = r^n - 1$. Eftersom $r \neq 1$ kan vi dividera leden med $r - 1$, och få likheten i satsen. ■

Mersenneprimtal

Definition 4 Ett primtal av formen $p = 2^n - 1$ kallas ett Mersenneprimtal.

Sats 2 Låt n vara ett naturligt tal. Om $2^n - 1$ är ett primtal, så är n ett primtal.

Bevis Antag att n inte är ett primtal. Om $n = 0$ eller $n = 1$, så är $2^n - 1$ inte ett primtal. Vi kan därför antaga att $n \geq 2$. Då finns det positiva heltal a och b, sådana att $n = ab$, $1 < a < n$ och $1 < b < n$. Det gäller därför enligt formeln för den geometriska summan att

$$(1 + 2^a + (2^a)^2 + \cdots + (2^a)^{b-1})(2^a - 1) = (2^a)^b - 1 = 2^{ab} - 1 = 2^n - 1.$$

Detta visar att $2^a - 1$ delar $2^n - 1$. Eftersom $1 < a < n$, så är $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$, och vi kan därför dra slutsatsen att $2^n - 1$ inte är ett primtal. ■

Talen $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ är Mersenneprimtal. Talet $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ är däremot inte ett primtal, vilket visar att det nödvändiga villkoret i satsen inte är ett tillräckligt villkor.

Perfekta tal

Definition 5 Det positiva heltalet q säges vara ett perfekt tal om q är summan av alla sina positiva delare utom q självt.

Villkoret kan formuleras

$$q = \sum_{1 \leq d < q,\ d|q} d.$$

Följande ekvivalenta villkor kan ofta vara mer ändamålsenligt.

$$2q = \sum_{1 \leq d,\ d|q} d.$$

Exempel 4 Talet 6 har de positiva delarna 1, 2, 3 och 6. Summan av delarna utom 6 självt är $1 + 2 + 3 = 6$. Talet 6 är därför ett perfekt tal. Summerar vi alla de positiva delarna, så får vi $1 + 2 + 3 + 6 = 6 + 6 = 2 \cdot 6$. Talet 15 är inte ett perfekt tal eftersom $1 + 3 + 5 = 9 \neq 15$.

Sats 3 Låt n vara ett positivt heltal och antag att $2^n - 1$ är ett Mersenneprimtal. Då är $q = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ ett perfekt tal.

Bevis De enda positiva delarna till primtalet $p = 2^n - 1$ är 1 och p, och de enda positiva delarna till 2^{n-1} är $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. De positiva delarna till q är därför $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ och $p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^{n-1}p$. Summerar vi dessa, så får vi

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} p \cdot 2^k = (1+p) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2 \cdot 2^{n-1}(2^n - 1) = 2q. \blacksquare$$

Exempel 5 Vi konstaterade att $2^n - 1$ är ett Mersenneprimtal för $n = 2, 3, 5, 7$. Motsvarande perfekta tal är $(2^2 - 1) \cdot 2^1 = 6$, $(2^3 - 1) \cdot 2^2 = 28$, $(2^5 - 1) \cdot 2^4 = 496$ och $(2^7 - 1) \cdot 2^6 = 8128$.

Följande sats säger att det inte finns några jämna perfekta tal andra än de, som framkommer i satsen ovan.

Sats 4 Antag att q är ett jämnt perfekt tal. Då finns det ett positivt heltal n, sådant att $q = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ och $2^n - 1$ är ett primtal.

Bevis Eftersom q är ett jämnt tal, kan vi skriva $q = 2^{n-1}a$, där a är ett udda tal och $n \geq 2$. Då är inte talet 2 en delare till a. Delarna till q är därför $a_i, 2a_i, 2^2a_i, \ldots 2^{n-1}a_i$, där a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, är delarna till a. Det gäller också att $a > 1$, eftersom 2^{n-1} inte är ett perfekt tal. Låt $s = \sum_{i=1}^{m} a_i$ vara summan av delarna till a. Eftersom q är ett perfekt tal, är

$$\begin{aligned}
2^n a = 2q = \sum_{1 \leq d,\ d|q} d &= \sum_{k=0}^{n-1} a_1 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_2 2^k + \cdots + \sum_{k=0}^{n-1} a_m 2^k \\
&= a_1 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + a_2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \cdots + a_m \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = s(2^n - 1).
\end{aligned}$$

Av detta följer att $2^n s - 2^n a = s$, och därför att $(2^n - 1)(s - a) = 2^n s - 2^n a - s + a = a$. Detta visar att $s - a$ delar a. Självklart är $s - a > 0$. Eftersom $2^n - 1 \geq 2^2 - 1 = 3$, så är $a > 1$ och $s - a < a$.

Antag nu att $s - a \neq 1$. Då är 1, a och $s - a$ tre *olika* delare till a, och därför är $s \geq 1 + a + (s - a) = s + 1$, vilket är en motsägelse. Det gäller därför att $s - a = 1$, vilket visar att $a = 2^n - 1$ och att $q = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Att $a = 2^n - 1$ är ett primtal följer av att $s = a + 1$, ty detta visar att de enda positiva delarna till a är 1 och a. $\blacksquare$

Det 43:e Mersenneprimtalet är $2^{30402457} - 1$. Bara fem större Mersenneprimtal är kända i juni 2014. Det största av dessa är $2^{57885161} - 1$, som har 17425170 decimala siffror. Det kan vara så, att detta tal är det 48:e Mersenneprimtalet, men det kan också finnas något oupptäckt mellan det 43:e och detta. Det hittills största kända jämna perfekta talet är följaktligen $(2^{57885161} - 1) \cdot 2^{57885160}$. Det är okänt huruvida det finns några udda perfekta tal.