LUNDS UNIVERSITET

Fråga Lund om matematik

Matematikcentrum
Matematik NF

Perfekta tal

Kjell Elfström

Delbarhet

Definition 1 Låt a och b vara heltal. Om det finns ett heltal c, sådant att $a = bc$, säger vi att b delar a och skriver $b \mid a$.

Definitionen innebär att b delar a, om kvoten $c = a/b$ är ett heltal. I fortsättningen betecknar variabler heltal, om inget annat anges.

Definition 2 Ett tal p säges vara ett primtal, om $p \geq 2$ och de enda positiva delarna till p är 1 och p.

Exempel 1 Talet 15 har de positiva delarna 1, 3, 5 och 15 och är därför inte ett primtal. Talet 11, som bara har de positiva delarna 1 och 11, är ett primtal. Talet 1 är enligt definitionen inte ett primtal, trots att den enda positiva delaren är 1.

Summor

Vi betecknar med $\sum_{k=m}^{n} a_k$ summan av talen $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$.

Exempel 2

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 56.$$

$$\sum_{k=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Med $\sum_{P(k)} a_k$ betecknar vi summan av alla tal a_k, för vilka k uppfyller påståendet $P(k)$.

Exempel 3

$$\sum_{k^2 \leq 20,\ k \geq 1} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

$$\sum_{d \mid 6,\ d \geq 1} d = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Copyright © 2010 by Kjell Elfström

Den geometriska summan

Definition 3 En summa $\sum_{k=m}^{n} a_k$ säges vara en geometrisk summa, om det finns en reell konstant r, sådan att $a_{k+1}/a_k = r$ då $k = m, m+1, m+2, \ldots, n-1$.

Om a är den första termen i en geometrisk summa och n antalet termer, så kan den geometriska summan skrivas

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a \sum_{k=0}^{n-1} r^k.$$

Sats 1 Låt $r \neq 1$ vara ett reellt tal och n ett positivt heltal. Då är

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Bevis Beteckna summan $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ med s. Då är

$$\begin{aligned} s &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-3} + r^{n-2} + r^{n-1}, \\ rs &= r + r^2 + r^3 \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n. \end{aligned}$$

Subtraherar vi de övre leden från de undre, så får vi $s(r-1) = rs - s = r^n - 1$. Eftersom $r \neq 1$ kan vi dividera leden med $r - 1$, och få likheten i satsen. ■

Mersenneprimtal

Definition 4 Ett primtal av formen $p = 2^n - 1$ kallas ett Mersenneprimtal.

Sats 2 Låt n vara ett naturligt tal. Om $2^n - 1$ är ett primtal, så är n ett primtal.

Bevis Antag att n inte är ett primtal. Om $n = 0$ eller $n = 1$, så är $2^n - 1$ inte ett primtal. Vi kan därför antaga att $n \geq 2$. Då finns det positiva heltal a och b, sådana att $n = ab$, $1 < a < n$ och $1 < b < n$. Det gäller därför enligt formeln för den geometriska summan att

$$(1 + 2^a + (2^a)^2 + \cdots + (2^a)^{b-1})(2^a - 1) = (2^a)^b - 1 = 2^{ab} - 1 = 2^n - 1.$$

Detta visar att $2^a - 1$ delar $2^n - 1$. Eftersom $1 < a < n$, så är $1 < 2^a - 1 < 2^n - 1$, och vi kan därför dra slutsatsen att $2^n - 1$ inte är ett primtal. ■

Talen $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ är Mersenneprimtal. Talet $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ är däremot inte ett primtal, vilket visar att det nödvändiga villkoret i satsen inte är ett tillräckligt villkor.

Perfekta tal

Definition 5 Det positiva heltalet q säges vara ett perfekt tal om q är summan av alla sina positiva delare utom q självt.

Villkoret kan formuleras

$$q = \sum_{1 \leq d < q,\ d \mid q} d.$$

Följande ekvivalenta villkor kan ofta vara mer ändamålsenligt.

$$2q = \sum_{1 \leq d,\ d \mid q} d.$$

Exempel 4 Talet 6 har de positiva delarna 1, 2, 3 och 6. Summan av delarna utom 6 självt är $1+2+3=6$. Talet 6 är därför ett perfekt tal. Summerar vi alla de positiva delarna, så får vi $1+2+3+6=6+6=2\cdot 6$. Talet 15 är inte ett perfekt tal eftersom $1+3+5=9\neq 15$.

Sats 3 Låt n vara ett positivt heltal och antag att 2^n-1 är ett Mersenneprimtal. Då är $q=(2^n-1)\cdot 2^{n-1}$ ett perfekt tal.

Bevis De enda positiva delarna till primtalet $p=2^n-1$ är 1 och p, och de enda positiva delarna till 2^{n-1} är $1,2,2^2,\ldots,2^{n-1}$. De positiva delarna till q är därför $1,2,2^2,\ldots,2^{n-1}$ och $p,2p,2^2p,\ldots,2^{n-1}p$. Summerar vi dessa, så får vi

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k+\sum_{k=0}^{n-1}p\cdot 2^k=(1+p)\sum_{k=0}^{n-1}2^k=2^n\frac{2^n-1}{2-1}=2\cdot 2^{n-1}(2^n-1)=2q. \blacksquare$$

Exempel 5 Vi konstaterade att 2^n-1 är ett Merenneprimtal för $n=2,3,5,7$. Motsvarande perfekta tal är $(2^2-1)\cdot 2^1=6$, $(2^3-1)\cdot 2^2=28$, $(2^5-1)\cdot 2^4=496$ och $(2^7-1)\cdot 2^6=8128$.

Följande sats säger att det inte finns några jämna perfekta tal andra än de, som framkommer i satsen ovan.

Sats 4 Antag att q är ett jämnt perfekt tal. Då finns det ett positivt heltal n, sådant att $q=(2^n-1)\cdot 2^{n-1}$ och 2^n-1 är ett primtal.

Bevis Eftersom q är ett jämnt tal, kan vi skriva $q=2^{n-1}a$, där a är ett udda tal och $n\geq 2$. Då är inte talet 2 en delare till a. Delarna till q är därför $a_i,2a_i,2^2a_i,\ldots 2^{n-1}a_i$, där a_i, $i=1,2,\ldots,m$, är delarna till a. Det gäller också att $a>1$, eftersom 2^{n-1} inte är ett perfekt tal. Låt $s=\sum_{i=1}^m a_i$ vara summan av delarna till a. Eftersom q är ett perfekt tal, är

$$\begin{aligned}2^na=2q&=\sum_{1\leq d,\ d|q}d=\sum_{k=0}^{n-1}a_12^k+\sum_{k=0}^{n-1}a_22^k+\cdots+\sum_{k=0}^{n-1}a_m2^k\\&=a_1\sum_{k=0}^{n-1}2^k+a_2\sum_{k=0}^{n-1}2^k+\cdots+a_m\sum_{k=0}^{n-1}2^k\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_m)\sum_{k=0}^{n-1}2^k=s(2^n-1).\end{aligned}$$

Av detta följer att $2^ns-2^na=s$, och därför att $(2^n-1)(s-a)=2^ns-2^na-s+a=a$. Detta visar att $s-a$ delar a. Självklart är $s-a>0$. Eftersom $2^n-1\geq 2^2-1=3$, så är $a>1$ och $s-a<a$.

Antag nu att $s-a\neq 1$. Då är 1, a och $s-a$ tre *olika* delare till a, och därför är $s\geq 1+a+(s-a)=s+1$, vilket är en motsägelse. Det gäller därför att $s-a=1$, vilket visar att $a=2^n-1$ och att $q=2^{n-1}(2^n-1)$. Att $a=2^n-1$ är ett primtal följer av att $s=a+1$, ty detta visar att de enda positiva delarna till a är 1 och a. $\blacksquare$

Det 39:e Mersenneprimtalet är $2^{13466917}-1$. Bara åtta större Mersenneprimtal är kända. Det hittills största är $2^{43112609}-1$, som har 12978189 decimala siffror. Det kan vara så, att detta tal är det 47:e Mersenneprimtalet, men det kan också finnas något oupptäckt mellan det 39:e och detta. Det hittills största kända jämna perfekta talet är följaktligen $(2^{43112609}-1)\cdot 2^{43112608}$. Det är okänt huruvida det finns några udda perfekta tal.