LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Myntvägningar

Kjell Elfström

Problemet

Bland ett antal mynt finns ett falskt med avvikande vikt. Vi vet inte, om det är lättare eller tyngre än de övriga äkta mynten. Med hjälp av en balansvåg skall vi efter ett antal vägningar finna det falska myntet och också avgöra, om det är lättare eller tyngre än de övriga. Vi vill avgöra hur antalet vägningar beror på antalet mynt.

Lösningen

Följande lemma kommer att visa sig användbart.

Lemma 1 Antag att n är ett positivt heltal och att a är ett heltal, sådant att $1 \leq a \leq 3^n$. Om heltalen q och r uppfyller att $a = 3q + r$, och r är något av talen -1, 0 och 1, så gäller det att $0 \leq q \leq 3^{n-1}$ och $0 \leq q + r \leq 3^{n-1}$.

Bevis Det gäller att $q = \frac{a-r}{3}$, och därför är $0 \leq \frac{1-r}{3} \leq q \leq \frac{3^n - r}{3} \leq \frac{3^n+1}{3} = 3^{n-1} + \frac{1}{3}$. Det första paret av olikheter följer nu av att q är ett heltal. Vidare är $q + r = \frac{a-r}{3} + r = \frac{a}{3} + \frac{2r}{3}$, varav $-\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \leq q + r \leq \frac{3^n}{3} + \frac{2}{3} = 3^{n-1} + \frac{2}{3}$. Det andra paret av olikheter följer av att $q + r$ är ett heltal. ■

Vi angriper först det något enklare problemet, där vi vet från början, om det falska myntet är lättare eller tyngre än de övriga.

Sats 1 Antag att antalet mynt är k, där $1 \leq k \leq 3^n$, och n är ett naturligt tal. Under förutsättningen ovan räcker det med n vägningar för att finna det falska myntet.

Bevis Vi genomför beviset i fallet, då vi vet att det falska myntet är lättare än övriga mynt. Om det i stället är tyngre, behöver man bara ersätta ordet ”lättare” med ordet ”tyngre” överallt i beviset.

Beviset genomförs med induktion över n. Då $n = 0$, finns det bara ett mynt, och det måste då vara det falska. Det krävs alltså 0 vägningar i detta fall.

Antag att påståendet är bevisat för ett visst naturligt tal n och att vi har k mynt, där $1 \leq k \leq 3^{n+1}$. Vi skriver $k = 3q + r$ som i lemma 1 och delar upp mynten i två högar med vardera q mynt och en med $q + r$ mynt. Enligt lemma 1 finns det högst 3^n mynt i varje hög. Om de två första högarna är tomma, så finns det lättare myntet i den tredje högen, och enligt induktionsantagandet räcker det med n vägningar för att finna det. Om de inte är tomma, så väger vi dem mot varandra. Om högarna väger lika, så finns myntet i den tredje högen. I annat fall finns det i den lättare av de två högarna. Enligt induktionsantagandet räcker det sedan med ytterligare n vägningar för att finna det lättare myntet i den så framtagna högen. Sammanlagt krävs det alltså högst $n+1$ vägningar. ■

Vi formulerar nu resultatet i det fall, då vi inte känner till, huruvida det falska myntet är lättare eller tyngre än de äkta mynten.

Sats 2 Om antalet mynt är k, där $3 \leq k \leq \frac{3^n-3}{2}$ och $n \geq 2$, så räcker det med n vägningar för att finna det falska myntet och avgöra, om det är lättare eller tyngre än de äkta mynten.

Bevis Vi skall nu dela upp mynten i tre högar. Om $n = 2$, så är $k = 3$, och vi delar upp mynten i tre högar med ett mynt i varje hög. Antag att $n \geq 3$ och att $\frac{3^{n-1}-3}{2} < k \leq \frac{3^n-3}{2}$. Enligt formeln för den geometriska summan är då

$$3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2} < k \leq 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1},$$

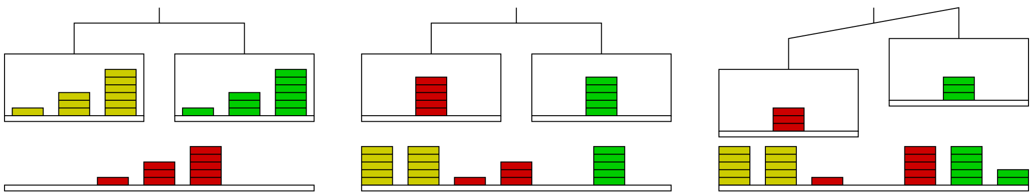
vilket ger att

$$k = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2} + a, \quad 1 \leq a \leq 3^{n-1}.$$

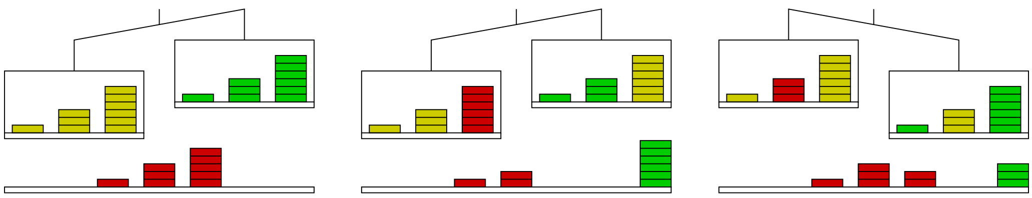
Vi skriver $a = 3q + r$ som i lemma 1 och har att $0 \leq q \leq 3^{n-2}$ och $0 \leq q + r \leq 3^{n-2}$. Mynten delas upp i tre högar på så sätt, att de två första innehåller $1 + 3 + \cdots + 3^{n-3} + q$ mynt var, och den tredje innehåller $1+3+\cdots+3^{n-3}+q+r$ mynt. De båda första högarna, som innehåller lika många mynt, vägs sedan mot varandra, och mynten i den tredje högen lämnas på bordet, där vågen står.

Antag först, att vi fick jämvikt i denna inledande vägning. Då finns det falska myntet bland mynten på bordet. Om $n = 2$ och $k = 3$, så väger vi det falska myntet mot ett av de äkta. Denna vägning avslöjar, hur det falska myntet avviker, och vi klarar oss med 2 vägningar. Om $n \geq 3$, delar vi upp mynten på bordet i staplar om $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-3}, q + r$ mynt. Se figuren på nästa sida. Eftersom $q + 1 \geq q + r$, är det sammanlagda antalet mynt i en vågskål minst lika stort som antalet mynt i en stapel. Vi väger först stapeln med $q + r$ mynt mot lika många äkta mynt. Om $q + r = 0$, kan vi tänka oss att vi gör om den inledande vägningen för att få enhetlighet. Vi har nu gjort 2 vägningar. Får vi inte jämvikt, finns det falska myntet bland mynten i stapeln, och vi vet, om det är lättare eller tyngre än de äkta mynten. Eftersom antalet mynt i stapeln är högst 3^{n-2}, räcker det enligt sats 1 med ytterligare $n - 2$ vägningar. Vi klarar oss alltså med högst n vägningar sammanlagt. Om det fortfarande är jämvikt, väger vi stapeln med 3^{n-3} mynt mot lika många äkta och fortsätter att väga de allt mindre staplarna mot äkta mynt, tills vi inte längre har jämvikt. Om det falska myntet fanns i stapeln med 3^{n-v} mynt, behövdes det v vägningar för att upptäcka det, och sedan räcker det enligt sats 1 med ytterligare $n - v$ vägningar. Det sammanlagda antalet vägningar överstiger alltså inte $v + n - v = n$.

Antag nu, att vi inte fick jämvikt i den inledande vägningen. Då är mynten på bordet äkta. Om $n = 2$, ersätter vi myntet i den vänstra vågskålen med det äkta på bordet. Fick vi jämvikt, så är det ersatta myntet falskt, och vi vet, hur det avviker. Fick vi inte jämvikt nu heller, så är det kvarvarande myntet i den högra vågskålen falskt, och vi vet även nu, hur det avviker. Då $n = 2$ räckte det alltså med 2 vägningar. Om $n \geq 3$, bildar vi staplar om $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-3}, q$ mynt av mynten i varje vågskål. Eftersom $q + r + 1 \geq q$, är antalet äkta mynt på bordet minst lika stort som antalet mynt i en stapel. Om $q = 0$, gör vi om den inledande vägningen för enhetlighet. Annars flyttar vi över den stapel med q mynt, som finns i den vänstra skålen, till den högra, stapeln med q mynt som från början fanns i den högra skålen till bordet, och slutligen flyttar vi upp q äkta mynt från bordet till den vänstra vågskålen. Får vi jämvikt efter detta, så fanns det falska myntet i stapeln, som flyttades från den högra skålen till bordet, och vi vet, hur myntet avviker. Om jämvikten förskjuts, så att den tyngre skålen nu har blivit den lättare, så finns det falska myntet i stapeln, som flyttades från den vänstra skålen till den högra, och vi vet på vilket sätt myntet avviker. I båda dessa fall har vi lokaliserat en stapel med högst 3^{n-2} mynt, i vilken det falska myntet finns, och vi kan använda sats 1 för att finna myntet med hjälp av högst ytterligare $n-2$ vägningar. Vi klarar oss alltså med n vägningar i detta fall. Om ojämvikten är densamma som i den inledande vägningen, så finns det falska myntet bland de mynt i vågskålarna, som ännu inte har deltagit i förflyttningar. Vi kan tänka på operationen, som utfördes, som en rotation av staplar med q mynt. Vi genomför nu en likadan rotation av staplar med 3^{n-3} mynt och fortsätter att rotera allt mindre staplar, tills vi finner en stapel, som innehåller det falska myntet. Om det finns i en stapel med 3^{n-v} mynt, har det krävts v vägningar för att finna stapeln, och sedan krävs det högst $n-v$ vägningar för att finna myntet. Även nu räcker det alltså med n vägningar sammanlagt. ■



Jämvikt i den första vägningen



Ej jämvikt i den första vägningen

Figurerna illustrerar fallet med $k = 29 = 3 + 3^2 + 17$ mynt. Enligt satserna räcker det med $n = 4$ vägningar för att finna det falska myntet. Det gäller att $17 = 3q + r$, där $q = 6$ och $r = -1$. Det finns därför 10 mynt i varje vågskål och 9 mynt på bordet i den första vägningen. I den första serien återfinns det falska myntet bland de tre röda i den vänstra vågskålen efter den sista av de tre redovisade vägningarna, och det är tyngre än de äkta. I den andra serien finns det bland de tre gula i den högra vågskålen och är också nu tyngre. I båda fallen kan vi använda metoden i sats 1 för att ta fram det falska myntet med hjälp av ytterligare en vägning.

Ett vanligt förekommande problem är att finna det falska myntet bland $12 = 3 + 9$ mynt. Sats 2 visar att det räcker med tre vägningar.

Om $k \geq 3$, så räcker det med $n = \left\lceil \frac{\ln(2k+3)}{\ln 3} \right\rceil$ vägningar.