LUNDS UNIVERSITET

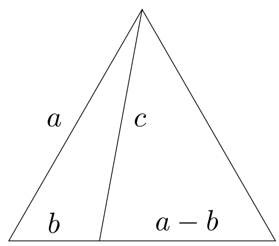
Matematikcentrum
Matematik NF

Delningsbara liksidiga heltalstrianglar

Kjell Elfström

Med heltalstriangel avses en triangel, vars sidlängder är heltal. Vi kallar en heltalstriangel med sidorna a, b och c primitiv, om $\operatorname{sgd}(a, b, c) = 1$.

Vi skall här härleda villkor för när en liksidig heltalstriangel med sidan a kan delas i två heltalstrianglar. För tre heltal a, b och c gäller det, att $\operatorname{sgd}(a, b, c) = \operatorname{sgd}(a, a - b, c)$. Om den ena av deltrianglarna i vidstående figur är primitiv, så är följaktligen också den andra primitiv. Varje delningsbar liksidig heltalstriangel kan alltså erhållas genom skalning av en, som kan delas i två primitiva trianglar. I fortsättningen kommer vi därför att kräva, att deltrianglarna är primitiva.



Eftersom vinklarna i en liksidig triangel är 60°, ger cosinussatsen, att

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab. \tag{1}$$

Detta ger, att deltrianglarna är primitiva om och endast om $\operatorname{sgd}(b, c) = 1$, och i så fall är $\operatorname{sgd}(a, b) = \operatorname{sgd}(a, c) = 1$. Om c är ett jämnt heltal, så måste minst en av termerna i högerledet i (1) vara jämn, och detta strider mot att deltriangeln är primitiv. Därför är c ett udda heltal. Om a är jämnt, så måste b vara udda av samma skäl. Om a är udda, så är ett av talen b och $a - b$ udda. Genom att vid behov byta ut $a - b$ mot b kan vi alltså antaga, att b är udda. Vi sammanfattar våra iakttagelser i följande sats.

Sats 1 En liksidig heltalstriangel med sidan a kan delas i två primitiva trianglar, om och endast om det finns relativt prima udda positiva heltal b och c, sådana att $b < a$ och a, b och c uppfyller (1).

Kvadratkomplettering visar, att (1) kan skrivas som $(2c)^2 = (2a - b)^2 + 3b^2$. Överflyttning och användning av konjugatregeln ger oss sedan den ekvivalenta ekvationen

$$(2c + 2a - b)(2c - 2a + b) = 3b^2.$$

Antag, att primtalet p delar båda faktorerna i vänsterledet. Eftersom faktorerna är udda, är $p > 2$. Eftersom p^2 delar $3b^2$, måste det gälla, att p delar b. Eftersom faktorernas summa $4c$ är delbar med p, får vi motsägelsen, att p delar både b och c. Vi har härmed visat, att faktorerna är relativt prima. Eftersom den första faktorn och högerledet är positiva, är också den andra faktorn positiv. Det följer, att

$$2c + 2a - b = 3m^2, \quad 2c - 2a + b = n^2, \quad b = mn$$

eller

$$2c + 2a - b = n^2, \quad 2c - 2a + b = 3m^2, \quad b = mn,$$

där m och n är relativt prima udda positiva heltal och n inte är delbart med 3.

I det första fallet är

$$a = \frac{3m^2 - n^2 + 2mn}{4}, \quad b = mn, \quad c = \frac{3m^2 + n^2}{4}.$$

Villkoret $b < a$ är uppfyllt, om och endast om $3m^2 - n^2 - 2mn = (3m + n)(m - n) > 0$, vilket är ekvivalent med att $m > n$.

I det andra fallet är

$$a = \frac{n^2 - 3m^2 + 2mn}{4}, \quad b = mn, \quad c = \frac{3m^2 + n^2}{4}.$$

Nu är $b < a$, om och endast om $n^2 - 3m^2 - 2mn = (m + n)(n - 3m) > 0$, vilket är ekvivalent med att $n > 3m$.

Vi har härmed bevisat följande sats.

Sats 2 En liksidig heltalstriangel med sidan a kan delas i två primitiva trianglar, om och endast om

$$a = \frac{3m^2 - n^2 + 2mn}{4}, \quad m > n \qquad \text{eller} \qquad a = \frac{n^2 - 3m^2 + 2mn}{4}, \quad n > 3m,$$

där m och n är relativt prima udda positiva heltal och n inte är delbart med 3.