LUNDS UNIVERSITET

Fråga Lund om matematik

Matematikcentrum
Matematik NF

Jeep-problemet

Kjell Elfström

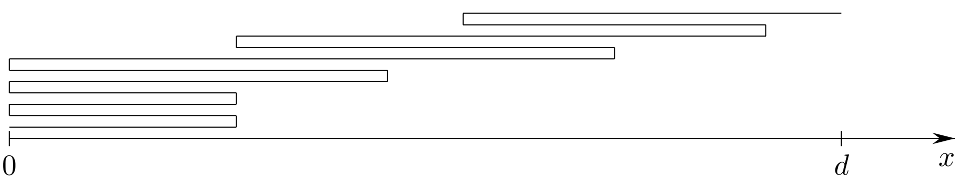
Problemet

En jeep kan sammanlagt ta 200 liter bensin i tanken och i lösa dunkar. Jeepen kan gå 2,5 km på 1 liter bensin och skall köras till en punkt 1000 km in i en öken. Bränsle finns bara vid startpunkten så föraren måste placera ut bensin i depåer längs färdvägen för att klara färden. Frågan är hur mycket bränsle det går åt och var depåerna skall placeras.

Problemets matematiska formulering

Låt oss kalla den maximala volym bränsle som bilen kan frakta för en volymsenhet och den sträcka bilen kommer på en volymsenhet för en längdenhet. Vi förlägger färden till x-axeln så att startpunkten och målet har koordinaterna 0 respektive d, där d är avståndet mellan punkterna. Vi antar att den sammanlagda körsträckan är s längdenheter och att den initiala depån innehåller b volymsenheter. Då är $d \leq s \leq b$. Om $X(t)$ är jeepens position efter t längdenheter så är X en kontinuerlig funktion av t, $X(0) = 0$, $X(s) = d$ och $0 \leq X(t) < d$ då $0 < t < s$. Vi säger att X är en b-kurva om färden är möjlig att genomföra med b volymsenheter i den initiala depån.

Figur 1 visar hur kurvan $t \mapsto X(t)$ kan se ut. Hela kurvan ligger på x-axeln men har i figuren sträckts ut för att göras synlig. De vertikala delarna motsvarar enstaka punkter, som har längden 0.



Figur 1: $x = X(t)$

Problemet kan nu formuleras som att för ett givet värde på d finna en b-kurva X som minimerar b.

Det kan tyckas vara naturligt att kräva att kurvan bara byter riktning ändligt många gånger. I problemets lösning kommer vi med kurva att mena en sådan naturlig kurva och ge ett bevis för att det finns en naturlig kurva som ger lika liten eller mindre bensinförbrukning än alla andra naturliga kurvor. Det är sant att det inte finns någon annan (onaturlig) kurva, som ger en lägre bensinförbrukning. Detta diskuteras i avsnittet om Banachs formel.

Lösningen

Problemet löstes av N. J. Fine 1947 [2]. Den lösning som presenteras här har jag inspirerats till av en artikel från 1970 av D. Gale [3].

I stället för att direkt lösa problemet löser vi först det duala problemet, att för ett givet värde på b finna en b-kurva X som maximerar d.

En strategi är att flytta den ursprungliga depån vid punkten 0 till en punkt x litet närmare målet. Den nya depån blir naturligtvis mindre eftersom en del bränsle går åt vid förflyttningen. Färden utgörs av ett antal tur- och returresor och slutligen en enkelresa från 0 till x. Därefter blir x utgångspunkt för den fortsatta färden. Depån vid x flyttas fram till en ny punkt ännu litet närmare målet och så fortsätter färden tills målet d är nått och bensinen är slut.

Definition 1 Låt t vara ett reellt tal. Heltalsdelen $[t]$ av t defininieras som det största heltalet n, sådant att $n \leq t$. Decimaldelen (t) av t definieras genom $(t) = t - [t]$.

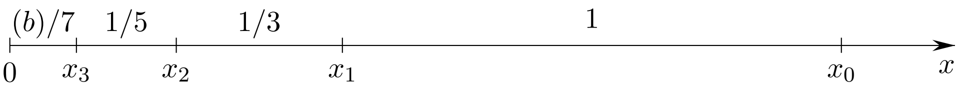
Sätt nu $n = [b]$ och definiera punkterna x_k, $k = 0, 1, \dots, n$, så att

$$x_n = \frac{(b)}{2n+1}$$

och

$$x_k - x_{k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Vi skall visa att det är möjligt att ta sig från utgångspunkten 0 till $d = x_0$ genom att successivt placera depåer i punkterna $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. Om $b = n$ är ett positivt heltal så är $(b) = 0$ och därför $x_n = 0$. I det fallet placerar vi den första nya depån i punkten x_{n-1}. Om $b = 0$ står jeepen i x_0 från början.



Figur 2: Depåer då $n = 3$

Lemma 1 Låt k vara ett naturligt tal och c ett reellt tal i intervallet $(0, 1]$. Antag att det finns $b = k + c$ volymsenheter vid punkten x' och att punkten x'' ligger $c/(2k+1)$ längdenheter från x'. Det går då att resa från x' till x'' på ett sådant sätt att det efter resan finns en depå med k volymsenheter i x''.

Bevis Föraren gör k tur- och returresor från x' till x''. Före varje resa fyller han 1 volymsenhet i bilen. Framme i x'' deponerar han allt som finns kvar utom det som behövs för återfärden. Efter tur- och returresorna fyller han i de återstående c volymsenheterna, gör en enkelresa till x'' och deponerar det som är kvar. Färden motsvarar $2k + 1$ enkelresor som var och en kräver $c/(2k+1)$ volymsenheter. Därför har c volymsenheter förbrukats och de resterande k volymsenheterna finns i depån vid x''. ■

Lemma 1 visar att det är möjligt att ta sig från 0 till x_0. Låt nämligen som innan $n = [b]$. Om b inte är ett heltal så är $0 < (b) < 1$. Sätter vi $k = n$, $c = (b)$, $x' = 0$ och $x'' = x_n$ visar lemmat att en ny depå med n volymsenheter kan skapas i x_n. Om $b = n$ är ett heltal så är $x_n = 0$. I vilket fall som helst så finns det nu en depå med n volymsenheter i x_n. Om sedan $c = 1$ säger lemmat att om det finns en depå med $k + 1$ volymsenheter i $x' = x_{k+1}$ går det att åka till $x'' = x_k$ och där skapa en ny depå med k volymsenheter.

Det går alltså att åka från x_n till x_{n-1} och där skapa en depå med $n-1$ volymsenheter, sedan åka till x_{n-2} och skapa en depå med $n-2$ volymsenheter och fortsätta på det sättet tills målet x_0 nåtts. Färden från depån före x_k till x_k kräver k tur- och returresor och en enkelresa.

Definition 2 Vi definierar funktionen D genom

$$D(t) = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2[t]-1} + \frac{(t)}{2[t]+1}, \quad t \geq 0.$$

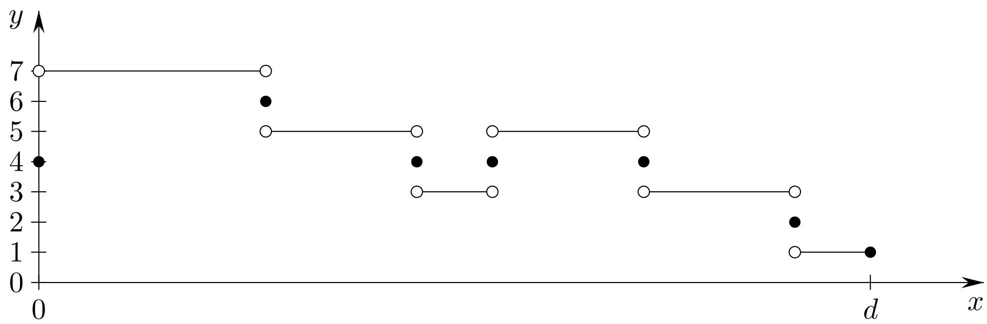
Den ovan beskrivna färden för jeepen till en punkt $D(b)$ längdenheter från utgångspunkten. Detta är i själva verket det maximala värdet av d för ett givet värde på b. Innan vi bevisar det behöver vi några hjälpresultat.

Lemma 2 Funktionen D är strängt växande och dess värdemängd är $[0, \infty)$.

Bevis Att D är strängt växande är självklart. Jämförelse med den harmoniska serien visar att $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k-1)$ är divergent. Det följer att $D(n) \to \infty$ då $n \to \infty$. Vidare är det klart att $D(t) \geq 0$. Om $x \geq 0$ låter vi n vara det största heltalet sådant att $D(n) \leq x$. Då är $x = D(n) + c/(2n+1)$, där $0 \leq c < 1$. Med $t = n + c$ är $x = D(t)$ vilket visar att x tillhör värdemängden till D. ■

Definition 3 Låt $X : [a, b] \to \mathbf{R}$ vara en funktion. Då $x \in \mathbf{R}$ skall vi med $n_X(x)$ mena antalet rötter $t \in [a, b]$ till ekvationen $X(t) = x$. Om ekvationen har oändligt många rötter sätter vi $n_X(x) = \infty$.

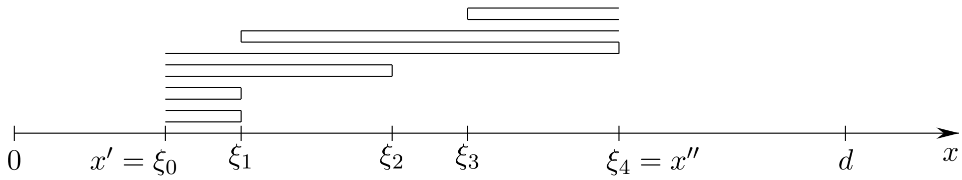
Är det klart vilken funktion X som avses skriver vi bara $n(x)$. Om X är en jeepkurva så är $n(x)$ ändlig för alla x och noll utanför intervallet $[0, d]$. Figur 3 visar funktionen n som hör till kurvan X i figur 1.



Figur 3: $y = n(x)$

Lemma 3 Antag att $0 \leq x' < x'' \leq d$ och att $n(x) \geq m$ då $x' < x < x''$. Då är den sammanlagda längden av de delar av kurvan X som ligger i $[x', x'']$ minst $m(x'' - x')$.

Bevis Vi påminner om att vi förutsätter att kurvan bara byter riktning ändligt många gånger. Antag att kurvan inte byter riktning i intervallet $[x', x'']$ utom möjligen i punkterna $x' = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n-1} < \xi_n = x''$. Se figur 4. Den kan dock byta riktning flera gånger i var och en av dessa punkter och även komma in i och ut ur intervallet flera gånger. Enligt förutsättningarna passerar kurvan varje intervall (ξ_{k-1}, ξ_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, minst m gånger. Lemmat följer av att den sammanlagda längden av dessa intervall är $x'' - x'$. ■



Figur 4: $x = X(t),\ x' \leq x \leq x''$

Sats 1 För ett givet $b \geq 0$ är $D(b)$ det maximala värdet av d.

Bevis Vi har redan visat att det finns en b-kurva som når till punkten $D(b)$. Det återstår att visa att $d \leq D(b)$ för alla b-kurvor. Sätt $n = [s]$, där s är kurvans längd, och låt $x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$, vara den punkt i $[0, d]$, som är sådan att den sammanlagda längden av de delar av kurvan som ligger till höger om x_k är k längdenheter. Då är

$$0 \leq x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0 = d.$$

Den sammanlagda längden av de delar av kurvan som ligger mellan x_{k+1} och x_k är 1 längdenhet. Om $0 < x < x_k$ går det åt en viss mängd bränsle för färden från x till x_k. För den delen av färden som sker till höger om x_k krävs minst k volymsenheter bensin. För att forsla detta bränsle förbi punkten x_k måste jeepen passera punkten x minst $k + 1$ gånger i riktning från 0 till d. Därför måste den passera punkten x minst k gånger i den andra riktningen. Jeepen måste alltså befinna sig i punkten x minst $2k + 1$ gånger. Den sammanlagda körsträckan i intervallet $[x_{k+1}, x_k]$, där $0 \leq k \leq n - 1$, är därför enligt lemma 3 minst $(2k+1)(x_k - x_{k+1})$ längdenheter. Eftersom körsträckan är 1 längdenhet visar detta att $(2k + 1)(x_k - x_{k+1}) \leq 1$, dvs

$$x_k - x_{k+1} \leq \frac{1}{2k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Körsträckan i $[0, x_n]$ är $s - n = (s)$ längdenheter och vi får på samma sätt

$$x_n = x_n - 0 \leq \frac{(s)}{2n+1}.$$

Eftersom $d = x_0 = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + x_n$ så är

$$d \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{(s)}{2n+1} = D(s).$$

Enligt lemma 2 är D växande och eftersom $s \leq b$ följer det att $d \leq D(b)$. ■

Definition 4 Enligt lemma 2 är D inverterbar. Vi sätter $B = D^{-1}$.

I beviset till lemma 2 såg vi att $B(x) = n + (2n + 1)(x - D(n))$, där n är det största heltalet sådant att $D(n) \leq x$.

Sats 2 För ett givet $d \geq 0$ är $B(d)$ det minimala värdet av b.

Bevis Om $b_0 = B(d)$ så är $d = D(b_0)$ och sats 1 ger att jeepen kan komma d längdenheter in i öknen på b_0 volymsenheter bensin. Enligt lemma 2 är $D(b) < D(b_0) = d$ då $b < b_0$, vilket visar att b_0 är den minimala volymen. ■

I det inledande problemet är en volymsenhet 200 liter, en längdenhet 500 km och jeepen skall köra 2 längdenheter in i öknen. Den minimala bensinvolymen är $B(2)$ volymsenheter. Eftersom

$$D(7) = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \frac{88069}{45045} < 2$$

och

$$D(8) = D(7) + \frac{1}{15} = \frac{91072}{45045} > 2$$

så är $n = 7$ det största heltal för vilket $D(n) \leq 2$. Det följer att

$$B(2) = 7 + (2 \cdot 7 + 1)(2 - D(7)) = 7 + \frac{2021}{3003} = \frac{23042}{3003},$$

vilket motsvarar 4608400/3003 $\approx$ 1534,6 liter. Deponeringspunkterna $x_k = 2 - D(k)$, där $k = 7, 6, \ldots, 1$, är 2021/45045, 422/3465, 67/315, 34/105, 7/15, 2/3, 1 och ligger omkring 22,4, 60,9, 106,3, 161,9, 233,3, 333,3 och 500,0 km från startpunkten.

Funktionerna *D* och *B*

Det är ett välkänt faktum att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \to \gamma \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

där $\gamma \approx 0{,}5772$ är Eulers konstant. Eftersom

$$D(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

följer det att

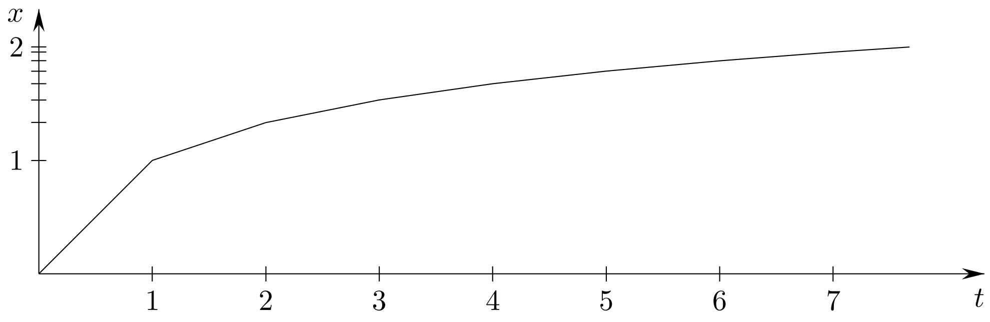
$$D(n) - \frac{1}{2} \ln n \to \frac{\gamma}{2} + \ln 2 \quad \text{då} \quad n \to \infty$$

och det är sedan enkelt att visa att

$$D(t) - \frac{1}{2} \ln t \to \frac{\gamma}{2} + \ln 2 \quad \text{då} \quad t \to \infty.$$

Med $t = B(x)$ får vi $2x - \ln B(x) \to \gamma + \ln 4$ då $x \to \infty$, dvs

$$4e^{\gamma - 2x} B(x) \to 1 \quad \text{då} \quad x \to \infty.$$



Figur 5: $x = D(t)$

Banachs formel

Definition 5 En kontinuerlig kurva $X : [a, b] \to \mathbf{R}$ kallas rektifierbar om

$$s = \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} |X(t_k) - X(t_{k-1})| < \infty,$$

där supremum tas över alla indelningar $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ av $[a, b]$. Talet s kallas i så fall för längden av kurvan. Man säger också att funktionen X är av begränsad variation och kallar s för totalvariationen av X.

Sats 3 Låt $X : [a, b] \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig rektifierbar kurva med längden s. Då är $n = n_X$ integrerbar i Lebesgues mening och

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x)\,dx = s.$$

Denna sats bevisades 1925 av S. Banach [1].

Korollarium 1 Låt $X : [a, b] \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig rektifierbar kurva, $s(t)$ längden av restriktionen av X till intervallet $[a, t]$ och $n = n_X$. Om $x' < x''$ så är

$$\int_{x'}^{x''} n(x)\,dx = \int_M 1\,ds(t),$$

där $M = \{t \in [a, b]\ ;\ x' \leq X(t) \leq x''\}$.

I lösningen till jeep-problemet var det bara i lemma 3 det användes att kurvan endast byter riktning ändligt många gånger. Korollarium 1 visar att lemmat är sant för alla rektifierbara kurvor.

Bibliografi

[1] S Banach, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie,* Fundamenta Mathematicae, VII (1925) 225–236

[2] N J Fine, *The jeep problem,* American Mathematical Monthly, 54 (1947) 24–31

[3] D Gale, *The jeep once more, or jeeper by the dozen,* American Mathematical Monthly, 77 (1970) 493–501