LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Några integraler

Kjell Elfström

Inversa funktioner

Om f är en funktion, och ekvationen $f(x) = y$ till varje $y \in V_f$ har en entydigt bestämd lösning $x \in D_f$, så säger man att f är inverterbar. Man betecknar lösningen x med $f^{-1}(y)$ och kallar funktionen f^{-1} för inversen till f. T ex är funktionen $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, inverterbar. Ekvationen $y = f(x) = x^3$ har ju den entydiga lösningen $x = f^{-1}(y) = y^{1/3}$.

Låt funktionen f vara definierad på ett öppet intervall I och antag att f är strängt monoton och deriverbar på I. Om $x \in I$ och $f'(x) \neq 0$, så är f^{-1} deriverbar i punkten $f(x)$ och $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$. Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt monoton och deriverbar på hela $\mathbf{R}$ och $f'(x) = 3x^2$. Vi ser att $f'(x) = 0$ bara då $x = 0$. Därför är f^{-1} deriverbar i x^3, då $x \neq 0$, och $(f^{-1})'(x^3) = 1/f'(x) = 1/(3x^2)$. Sätter vi $y = x^3$, så är $x = y^{1/3}$ och formeln ger oss att $(f^{-1})'(y) = 1/f'(y^{1/3}) = 1/(3(y^{1/3})^2) = (1/3)y^{-2/3}$. Samma resultat erhålls naturligtvis, om man direkt deriverar $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ i punkten y.

Funktionen arcsin

Funktionen sinus är inte inverterbar, eftersom den antar vissa y-värden för flera olika x-värden. Vi studerar restriktionen $f(x) = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Då är $D_f = [-\pi/2, \pi/2]$ och $V_f = [-1, 1]$. Eftersom f är kontinuerlig, och $f'(x) = \cos x > 0$, då $-\pi/2 < x < \pi/2$, så är f strängt växande i $[-\pi/2, \pi/2]$. Ekvationen $f(x) = y$ har därför till varje $y \in [-1, 1]$ en entydigt bestämd lösning $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Vi kallar denna lösning för

$$x = f^{-1}(y) = \arcsin y.$$

Det gäller alltså att

$$y = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin y,$$

då $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ och $-1 \leq y \leq 1$. T ex är $\arcsin 1 = \pi/2$ och $\arcsin \sqrt{3}/2 = \pi/3$.

Då $-\pi/2 < x < \pi/2$, så är $f'(x) = \cos x > 0$. Om $y = \sin x$, där $-\pi/2 < x < \pi/2$, gäller det därför att

$$D \arcsin y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Vi låter x och y byta roller och formulerar detta resultat som en sats:

Sats 1 Då $-1 < x < 1$, är

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

De hyperboliska funktionerna

Inspirerade av Eulers formler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

definierar vi de hyperboliska funktionerna cosinus hyperbolicus och sinus hyperbolicus genom

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Man ser direkt att $D \sinh x = \cosh x$, och den hyperboliska ettan

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

följer av

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

Eftersom $D \sinh x = \cosh x > 0$ för alla reella x, så är sinh inverterbar. Vi betecknar inversen med arsinh. Det gäller alltså att

$$y = \sinh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arsinh} y$$

för alla reella x och y. Som tidigare får vi, om $y = \sinh x$, att

$$D \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{D \sinh x} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Sats 2 För alla reella x gäller det att

$$D \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ekvationen $y = \sinh x$ är ekvivalent med $2y = e^x - e^{-x}$. Multiplicerar vi båda led med e^x, får vi den ekvivalenta ekvationen $2ye^x = (e^x)^2 - 1$. Skriver vi $t = e^x$, övergår den i $t^2 - 2yt = 1 \;\Leftrightarrow\; t = y \pm \sqrt{1 + y^2}$, och eftersom $t = e^x > 0$, så duger bara lösningen $t = y + \sqrt{1 + y^2} \;\Leftrightarrow\; x = \ln (y + \sqrt{1 + y^2})$. Vi har härmed bevisat följande sats.

Sats 3 För alla reella tal x gäller det att

$$\operatorname{arsinh} x = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Några integraler

Satserna 1, 2 och 3 ger oss direkt

Sats 4

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C, \qquad -1 < x < 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + C, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Med hjälp av partiell integration får vi ytterligare ett par primitiva funktioner.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= \int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - J + \operatorname{arsinh} x.
\end{aligned}
$$

Löser vi ut I och J, får vi

Sats 5

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2} + C, \qquad -1 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arsinh} x}{2} + C, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Att formel (1) gäller till höger i -1 och till vänster i 1 kan visas med hjälp av medelvärdessatsen.

Enligt integralkalkylens huvudsats är

$$F_1(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$$

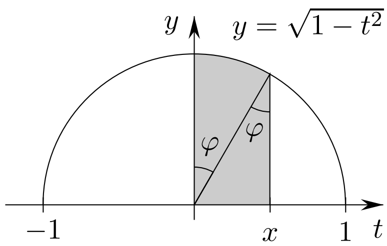
en primitiv funktion till $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Man kan därför också visa (1) genom att visa att $F_1(x)$ och

$$F_2(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}$$

skiljer sig åt med en konstant, då $-1 \le x \le 1$. Då $0 \le x \le 1$, är $F_1(x)$ arean av det skuggade området i figuren nedan. Eftersom $\sin\varphi = x$, så är $\varphi = \arcsin x$. Cirkelsektorns area är $\varphi/2$, och triangelarean är $x\sqrt{1-x^2}/2$. Vi får därför att

$$F_1(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2} = F_2(x), \qquad 0 \le x \le 1,$$

och eftersom både F_1 och F_2 är udda funktioner, så är $F_1(x) = F_2(x)$, då $-1 \le x \le 1$.



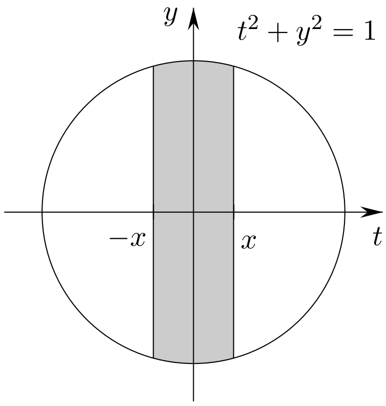
Exempel 1 En cirkelskiva skall delas i tre lika stora delar med två parallella raka snitt. Var skall snitten placeras, om de skall ligga lika långt från cirkelns medelpunkt? Vi antar att cirkelns radie är 1. Arean av den skuggade biten är

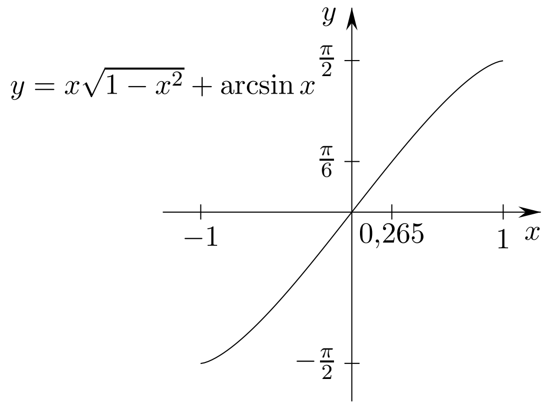
$$2\int_{-x}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt = 4\int_{0}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt = 2(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x).$$

Hela cirkelarean är π. Mittenbiten, och även de båda övriga bitarna, upptar en tredjedel av cirkelskivan, då

$$x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

Denna ekvation, som bara kan lösas numeriskt, har lösningen $x \approx 0,2649320846$.





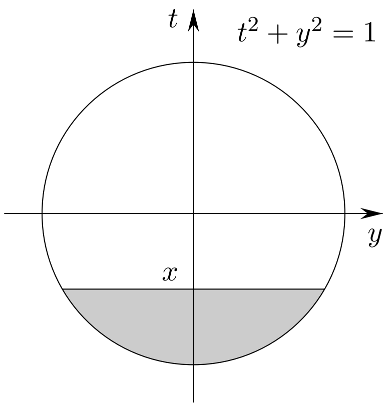
Exempel 2 En oljesticka skall tillverkas till en liggande cylindrisk tank. Hur skall den graderas? Vi antar, som i det förra exemplet, att cylinderradien är 1. Vätskans volym är tankens längd gånger vätskans vertikala tvärsnittsarea. Vätskevolymen är alltså proportionell mot nämnda tvärsnittsarea, som är

$$2\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} + x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x.$$

Full tank motsvarar tvärsnittsarean π. Förhållandet mellan vätskevolymen och tankens volym är därför

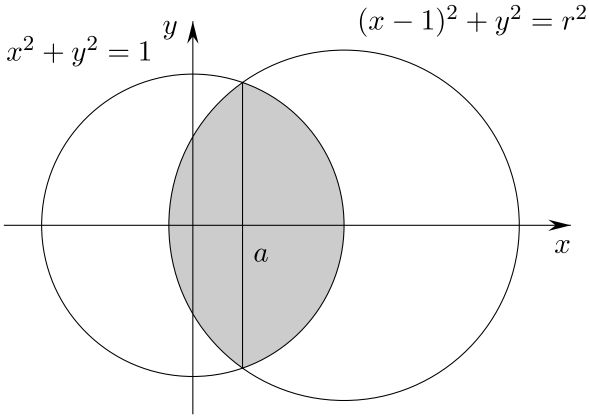
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{\pi}.$$

Låter vi d vara vätskedjupet, där $d = 1$ motsvarar hela tankens djup, så är $d = (x+1)/2$. Värdena i tabellen nedan har framkommit genom att vi löst ekvationen $f(x) = k/10$ då $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.



Volym	Djup
0,0	0,000
0,1	0,156
0,2	0,254
0,3	0,340
0,4	0,421
0,5	0,500
0,6	0,579
0,7	0,660
0,8	0,746
0,9	0,844
1,0	1,000

Exempel 3 En get skall bindas vid en stolpe på periferin av en cirkulär äng. Hur långt skall bandet vara, om geten skall kunna beta av halva ängen? Vi antar att ängens radie är 1 och att bandets längd är r. Då är $1 < r < 2$.



Ängen är den vänstra cirkelskivan, och geten kan beta den skuggade delen, som består av två cirkelsegment med areorna $2\int_{1-r}^{a} \sqrt{r^2 - (x-1)^2}\, dx$ och $2\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$. Cirklarnas skärningspunkter har x-koordinaten a. För att bestämma denna subtraherar vi den ena cirkelns ekvation från den andras.

$$r^2 - 1 = (x-1)^2 + y^2 - x^2 - y^2 = -2x + 1.$$

Vi löser ut x och får att $a = x = 1 - r^2/2$. Substitutionen $1 - x = rt$ i den första integralen ger att

$$2\int_{1-r}^{a} \sqrt{r^2 - (x-1)^2}\, dx = 2r^2 \int_{r/2}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \arcsin\frac{r}{2} \right).$$

Eftersom

$$\sqrt{1-a^2} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r^2}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{4}} = r\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2},$$

är den andra integralen

$$2\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) r\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \arcsin\left(1 - \frac{r^2}{2}\right).$$

Arean av det skuggade området är summan

$$A(r) = r^2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{r}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) - r\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

av dessa integraler. För att förenkla detta uttryck sätter vi $\varphi = \pi - 2\arcsin(r/2)$. Då är $\arcsin(r/2) = \pi/2 - \varphi/2$, vilket ger att $r/2 = \sin(\pi/2 - \varphi/2) = \cos(\varphi/2)$. Vi får också att $1 - r^2/2 = 1 - 2\cos^2(\varphi/2) = -\cos\varphi = \sin(\varphi - \pi/2)$, varför $\arcsin(1 - r^2/2) = \varphi - \pi/2$. Använder vi formlerna $2\cos^2(\varphi/2) = 1 + \cos\varphi$ och $2\cos(\varphi/2)\sin(\varphi/2) = \sin\varphi$, får vi

$$A(r) = 2\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2} + \pi - \varphi - 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \pi + \varphi\cos\varphi - \sin\varphi.$$

Löser vi ekvationen $\pi + \varphi\cos\varphi - \sin\varphi = \pi/2$ numeriskt, får vi $\varphi \approx 1{,}905695729$, vilket ger $r \approx 1{,}158728473$.

Båglängd

En kurva given på parameterformen $x = g(t),\ y = h(t),\ a \le t \le b$, där g och h är kontinuerligt deriverbara funktioner, har längden

$$\int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt.$$

En kurva av formen $y = f(x),\ a \le x \le b$, där f är en kontinuerligt deriverbar funktion, kan skrivas $x = t,\ y = f(t)$ och har därför båglängden

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Exempel 4 Vi söker längden av kurvan $y = x^2,\ a \le x \le b$. Om $f(x) = x^2$, så är $f'(x) = 2x$, och formeln oven ger att längden är

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Vi sätter $t = 2x$ och får

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} \sqrt{1+t^2}\, dt = \left[\frac{t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t}{4}\right]_{2a}^{2b} \\ &= \frac{b\sqrt{1+4b^2} - a\sqrt{1+4a^2}}{2} + \frac{\ln(2b + \sqrt{1+4b^2}) - \ln(2a + \sqrt{1+4a^2})}{4}. \end{aligned}$$

Exempel 5 Kurvan $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ t \ge 0$, utgör en spiral. Vi beräknar längden av den del där $t \le b$. Här är $dx/dt = \cos t - t\sin t$ och $dy/dt = \sin t + t\cos t$. Därför är

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \cos^2 t + t^2\sin^2 t - 2t\cos t\sin t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + 2t\cos t\sin t \\ &= (1+t^2)(\cos^2 t + \sin^2 t) = 1 + t^2, \end{aligned}$$

och längden är

$$\int_0^b \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{b\sqrt{1+b^2} + \ln(b + \sqrt{1+b^2})}{2}.$$