LUNDS UNIVERSITET

Fråga Lund om matematik

Matematikcentrum
Matematik NF

Herons formel

Kjell Elfström

Herons formel

Sats 1 Antag att sidorna i en triangel är a, b och c, att dess area är T och att dess halva omkrets är $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Då är

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Bevis Kalla vinkeln mellan sidorna b och c för θ. Då är $2bc\cos\theta = b^2 + c^2 - a^2$ enligt cosinussatsen och kvadrering av leden ger att

$$(2bc)^2 \cos^2\theta = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Enligt areasatsen är $4T = 2bc\sin\theta$. Kvadrering ger nu att $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2\theta$ och eftersom $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ så är

$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2\cos^2\theta = (2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 \\
&= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) = ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 16p(p-a)(p-b)(p-c),
\end{aligned}$$

vilket bevisar satsen. ■

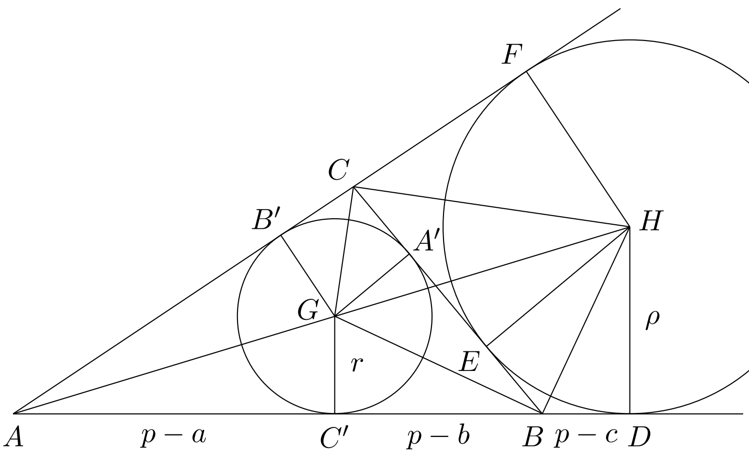
Heron

Heron från Alexandria var en grekisk matematiker och fysiker. Man vet ingenting om hans liv men man tror att han verkade mot slutet av det första århundradet efter Kristus. Detta grundar man bland annat på att Heron i ett av sina verk nämner en nyligen inträffad solförmörkelse som anses ha inträffat år 62 efter Kristus.

Han efterlämnade ett stort antal skrifter som ger oss viktiga upplysningar om det tekniska och mekaniska kunnandet under antiken. Bland dessa kan nämnas *Dioptra* (teodoliter, dvs ett slags vinkelmätdon), *Pneumatika* (kraftöverföring med vatten- och lufttryck), *Mechanika* (maskiner), *Belopoeika* (krigsmaskiner) och *Katoprika* (speglar). Hans verk finns utgivna i tysk översättning i [2]. Det är dock troligt att vissa av de verk som tillskrivs Heron har andra författare.

Det är i bok I av *Metrika* som hans berömda formel återfinns. Denna bok handlar om areamätning av bland annat trianglar, fyrhörningar, regelbundna polygoner, koner, cylindrar, prismor, pyramider och sfärer. Han anger även en metod att beräkna kvadratrötter. I bok II avhandlar han volymberäkning och i bok III uppdelning av areor och volymer i givna förhållanden.

Ett klassiskt bevis



Låt A, B och C vara de mot sidorna a, b respektive c stående hörnen. Heron inför den inskrivna och den vidskrivna cirkeln. Den senare tangerar sidan BC och förlängningarna av de andra två sidorna. Kalla cirklarnas radier för r respektive ρ. De tre trianglarna $\triangle BGC$, $\triangle CGA$ och $\triangle AGB$ har areorna $ar/2$, $br/2$ respektive $cr/2$, varför

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr. \tag{1}$$

Eftersom $BD = BE$, $CF = CE$ och $AD = AF$ så är

$$AD = \frac{1}{2}(AD + AF) = \frac{1}{2}(AB + BE + AC + CE) = p,$$

av vilket det följer att $BD = p - c$. Vidare är $AB' = AC'$, $BA' = BC'$ och $CA' = CB'$, varför $2p = 2AC' + 2BA' + 2CA' = 2AC' + 2a$, vilket ger att $AC' = p - a$. Vi får också att

$$BC' = AD - AC' - BD = p - (p-a) - (p-c) = a + c - p = 2p - b - p = p - b.$$

Eftersom $\triangle AC'G$ och $\triangle ADH$ är likformiga så är

$$\frac{r}{p-a} = \frac{\rho}{p}. \tag{2}$$

Av $\angle GBA' + \angle EBH = \angle C'BG + \angle DBH$ följer det att $\angle GBH$ är rät. Detta ger att de rätvinkliga trianglarna $\triangle GC'B$ och $\triangle BDH$ är likformiga, varför

$$\frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{\rho}. \tag{3}$$

Eliminerar vi ρ från (2) och (3) får vi

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Av (1) får vi sedan det önskade resultatet

$$T^2 = p^2 r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c). \blacksquare$$

Bibliografi

[1] T L Heath, *A history of Greek mathematics I, II,* Oxford, 1931

[2] J L Heiberg, *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia,* Leipzig, 1912

[3] I Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics II,* London, 1941