LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Fråga Lund om matematik

Ett talteoretiskt problem

Kjell Elfström

Problemet

Vi skall visa att det inte finns några positiva heltal x och y, sådana att

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y(y+1)^2(y+2)^3(y+3)^4.$$

Lösningen

Vi sätter $z = y + 1$. Påståendet lyder då, att det inte finns ett positivt heltal x och ett heltal $z \geq 2$, sådana att

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = (z-1)z^2(z+1)^3(z+2)^4.$$

Här kan vänsterledet skrivas

$$(x+1)(x+2)x(x+3) = (x^2+3x+2)(x^2+3x) = (x^2+3x+1)^2 - 1$$

och högerledet

$$(z-1)(z+1)z^2(z+1)^2(z+2)^4 = (z^2-1)\left(z(z+1)(z+2)^2\right)^2.$$

Med

$$u = x^2+3x+1, \quad v = z(z+1)(z+2)^2$$

kan ekvationen skrivas

$$u^2 - (z^2-1)v^2 = 1.$$

Eftersom $z \geq 2$, är $d = z^2 - 1 > 1$ inte en kvadrat. Ekvationen $u^2 - dv^2 = 1$ är Pells ekvation. En lösning till denna är $u = z$, $v = 1$. Eftersom $v = 1$, är detta en fundamentallösning. Det betyder att varje lösning $(u, v) = (u_n, v_n)$ med $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$, ges av

$$u_n + v_n\sqrt{d} = (z + \sqrt{d}\,)^n, \quad n \geq 0.$$

Detta ger att

$$u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{d} = (z+\sqrt{d}\,)^n(z+\sqrt{d}\,) = (u_n + v_n\sqrt{d}\,)(z+\sqrt{d}\,),$$

varav

$$u_{n+1} = zu_n + dv_n, \quad v_{n+1} = u_n + zv_n, \qquad u_0 = 1, \quad v_0 = 0.$$

Kombinerar vi formlerna och använder att $d = z^2 - 1$, får vi

$$v_{n+2} = 2zv_{n+1} - v_n, \qquad v_0 = 0, \quad v_1 = 1.$$

Vi får att

$$\begin{aligned}
v_0 &= 0 \\
v_1 &= 1 \\
v_2 &= 2z \\
v_3 &= 4z^2 - 1 \\
v_4 &= 8z^3 - 4z \\
v_5 &= 16z^4 - 12z^2 + 1
\end{aligned}$$

Det är känt att lösningarna u_n och v_n till Pells ekvation är strängt växande talföljder. Med $v = z(z+1)(z+2)^2 = z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z$ är det inte svårt att visa att $v_4 < v < v_5$ då $z \geq 2$. Eftersom v_n är en strängt växande funktion av n för fixt $z \geq 2$, följer det att $v_n \neq v$ då $z \geq 2$ för alla naturliga tal n, vilket fullbordar beviset.