Matematikcentrum
Matematik NF

Om antalet lösningar

Kjell Elfström

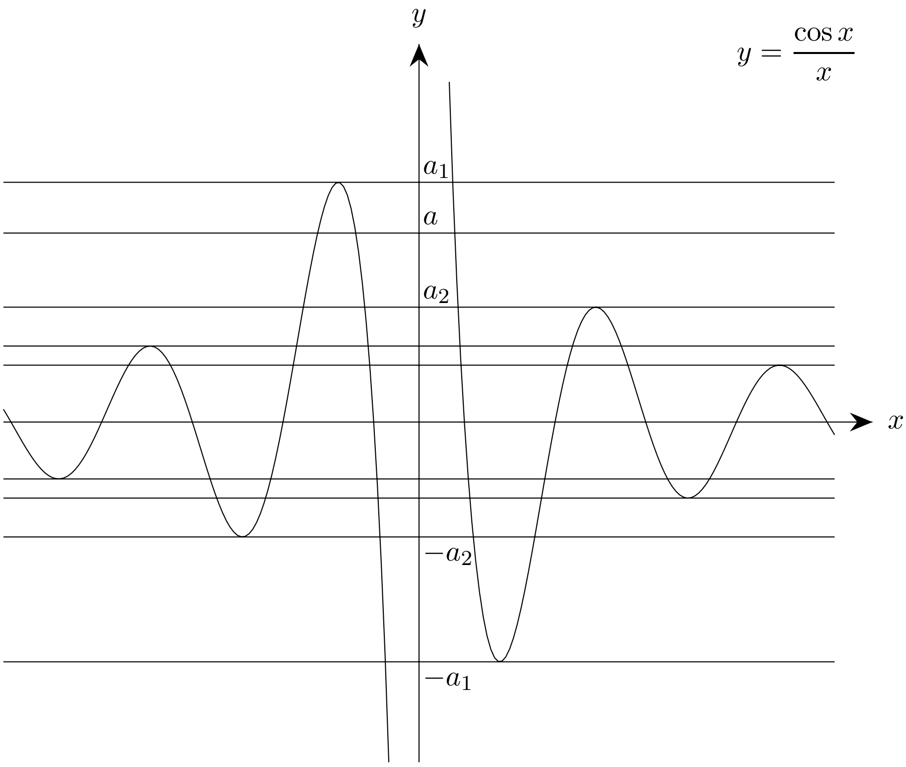
Vi önskar undersöka hur antalet lösningar till ekvationen

$$\cos x = ax$$

beror på parametern a. Vi noterar att $x = 0$ inte är en lösning för något värde på a. Antalet lösningar till ekvationen är därför lika stort som antalet lösningar till den ekvivalenta ekvationen

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} = a, \quad x \neq 0.$$

Det är alltså antalet skärningspunkter mellan kurvan $y = f(x)$ och linjen $y = a$ som söks. För det värde på a, som är utsatt i figuren nedan, ser det ut att finnas tre skärningspunkter. Ytterligare åtta linjer är utritade. Motsvarande a-värden är lokala extremvärden till funktionen f. Det ser ut att finnas en skärningspunkt om $a > a_1$, två om $a = a_1$ och tre om $a_2 < a < a_1$.



Vi undersöker nu funktionen f med avseende på gränsvärden och lokala extrempunkter. Funktionen är kontinuerlig i vart och ett av intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Eftersom $\cos 0 = 1 > 0$ och cos är kontinuerlig, så gäller det att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^-$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$. Vi noterar också att f är en udda funktion, d.v.s. $f(-x) = -f(x)$. Om $(x, f(x))$ är en lokal maximipunkt till f är därför $(-x, f(-x))$ en lokal minimipunkt och tvärtom. Det är alltså tillräckligt att undersöka f på intervallet $(0, \infty)$. Vidare är

$$f'(x) = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}.$$

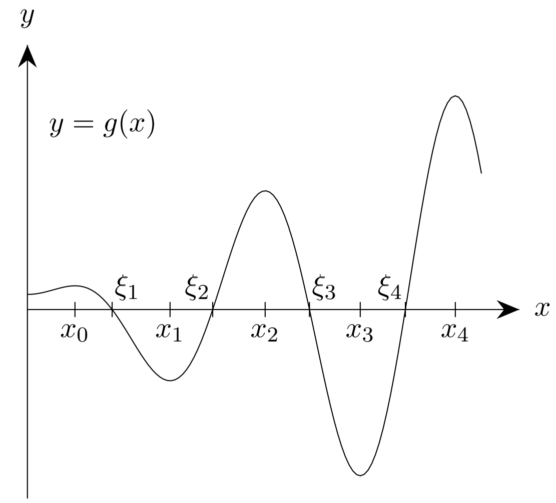
Vi är intresserade av nollställena till f', eftersom vi vill finna de lokala extremvärdena. Nollställena kan inte bestämmas exakt men är nollställen till derivatans täljare

$$g(x) = x \sin x + \cos x.$$

Det gäller att

$$g'(x) = x \cos x,$$

och vi ser att $g'(x) = 0$ då $x = 0$ eller $x = x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal. Låt I_0 vara intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$ och $I_n = (x_{n-1}, x_n)$, då n är ett positivt heltal. Då har g' inga nollställen i dessa intervall utan bara i deras ändpunkter. Mittpunkten i intervallet I_0 är $\frac{\pi}{4}$ och i intervallet I_n är den $n\pi$, om $n \geq 1$. Det gäller att $g'(\frac{\pi}{4}) > 0$ och $g'(n\pi) = n\pi \cos n\pi = n\pi(-1)^n$. Eftersom g' inte växlar tecken i intervallen, så är g' positiv i intervallet I_n, om $n \geq 0$ är ett jämnt heltal, och negativ, om $n \geq 0$ är ett udda heltal. Om $n \geq 0$ är ett jämnt heltal, så är alltså g strängt växande i I_n, och om $n \geq 0$ är ett udda heltal, så är g strängt avtagande i I_n. Detta betyder att g kan ha högst ett nollställe i I_n. Eftersom $g(0) = 1$ och $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ har samma tecken, så saknar g nollställen i I_0. Då n är ett positivt heltal, är $g(x_n) = (\frac{\pi}{2} + n\pi)(-1)^n$. Funktionen g har alltså olika tecken i ändpunkterna till intervallet I_n, om $n \geq 1$. Det betyder att g har precis ett nollställe ξ_n i intervallet I_n, om $n \geq 1$. Talen $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots$ är alltså de positiva nollställena till g och därför också till f'.



Vi undersöker nu vilka av dem som är lokala extrempunkter och undersöker i förekommande fall vilket slag av extremvärde det är. Antag först att $n \geq 1$ är ett udda heltal. Vi noterade ovan att g är strängt avtagande i I_n. Om $x \in I_n$, så gäller det alltså att $g(x) > 0$ då $x < \xi_n$ och $g(x) < 0$ då $x > \xi_n$. De omvända olikheterna gäller för f'. Det betyder att $f'(x) < 0$, om $x \in I_n$ och $x < \xi_n$, och $f'(x) > 0$, om $x \in I_n$ och $x > \xi_n$. Av denna teckenväxling ser vi att f har ett lokalt minimum i ξ_n. Om $n \geq 1$ är ett jämnt heltal, finner vi på samma sätt, att f har ett lokalt maximum i ξ_n. Det framgår också av denna undersökning, att $f' < 0$ i intervallet $(0, \xi_1)$ och i (ξ_{2n}, ξ_{2n+1}), och att $f' > 0$ i (ξ_{2n-1}, ξ_{2n}), där n är ett positivt heltal.

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 0 & & \xi_1 & & \xi_2 & & \xi_3 & & \xi_4 & \longrightarrow x \\
f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\
f(x) & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow &
\end{array}$$

På grund av att f är en udda funktion, har f lokala maxima i punkterna $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \ldots$ och $-\xi_1, -\xi_3, -\xi_5, \ldots$ och lokala minima i $\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots$ och $-\xi_2, -\xi_4, -\xi_6, \ldots$. Sätt nu $a_n = f((-1)^n \xi_n)$, om n är ett positivt heltal. Då kommer

$$a_1 = f(-\xi_1), a_2 = f(\xi_2), a_3 = f(-\xi_3), a_4 = f(\xi_4), \ldots$$

att vara funktionens lokala maximivärden. Talet ξ_n tillhör intervallet

$$I_n = (\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi).$$

Det gäller därför att $a_n > 0$, då n är ett positivt heltal. Eftersom

$$g(\xi_n) = \xi_n \sin \xi_n + \cos \xi_n = 0,$$

så är

$$\tan \xi_n = -\frac{1}{\xi_n},$$

av vilket det följer att

$$\cos^2 \xi_n = \frac{1}{1 + \tan^2 \xi_n} = \frac{\xi_n^2}{1 + \xi_n^2}.$$

Genom att beakta tecknet hos $\cos \xi_n$ finner vi att

$$a_n = f((-1)^n \xi_n) = \frac{\cos \xi_n}{(-1)^n \xi_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_n^2}}.$$

Det gäller därför att $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, och alla dessa lokala maximivärden är positiva. De lokala minimivärdena är $-a_1 < -a_2 < -a_3 < \cdots$, och dessa är negativa. Antalet lösningar till ekvationen blir 1 om $|a| > a_1$, $2n$ om $|a| = a_n$, $2n+1$ om $a_{n+1} < |a| < a_n$ och oändligt om $a = 0$. Värdena av a_n får bestämmas numeriskt, och de tre första värdena är ungefär 0,336508, 0,161228 och 0,106708.