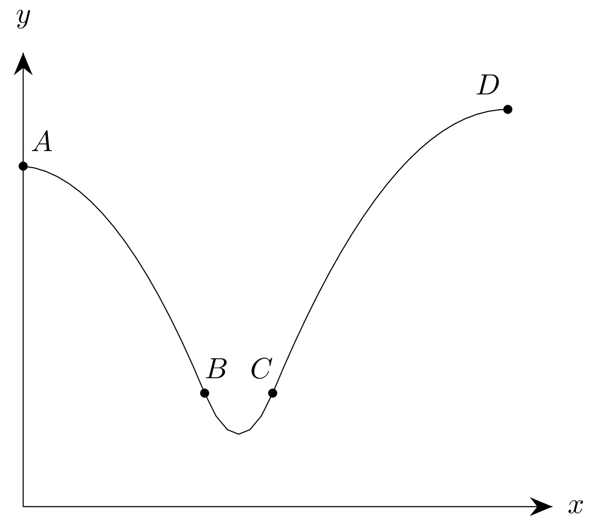
LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Berg- och dalbanan

Kjell Elfström

Problemet



Kurvan ovan består av tre parabelbågar. Man vet att $A = (0, 30)$, $B = (8, 10)$, $C = (11, 10)$ och att y-koordinaten för D är 35. Man vet också att kurvan saknar hörn och därför har en tangent i varje punkt och att lutningen i punkten A är $10°$ och att den är 0 i punkten D. Uppgiften består i att beräkna längden av kurvan.

Bakgrundskunskaper

Ett andragradspolynom kan skrivas $y = ax^2 + px + q$. Kvadratkomplettering ger att

$$y = ax^2 + px + q = a\left(x + \frac{p}{2a}\right)^2 - \frac{p^2}{4a} + q = a(x-b)^2 + c,$$

där

$$b = -\frac{p}{2a}, \quad c = -\frac{p^2}{4a} + q.$$

Man inser att polynomets största eller minsta värde beroende på tecknet av a är c och att detta antas i b. Derivatan är $y' = 2a(x - b)$.

Lösningen

Vi bestämmer först de tre delkurvornas ekvationer. Vi kommer för varje delkurva att antaga att dess ekvation är på formen $y = a(x-b)^2 + c$ och bestämma a, b och c. Vi noterar vilka värden vi fick, och använder sedan samma bokstäver a, b och c för nästa kurva. Vi kommer att använda att $y' = 2a(x-b)$.

Vi bestämmer först kurvan från A till B. Sätt $t = \tan 10°$. Eftersom kurvan går genom punkterna $(0, 30)$ och $(8, 10)$, är

$$ab^2 + c = 30, \tag{1}$$

$$a(8-b)^2 + c = ab^2 - 16ab + 64a + c = 10. \tag{2}$$

Informationen om lutningen ger att

$$y'(0) = -2ab = -t. \tag{3}$$

Subtraherar vi ekvation (2) från ekvation (1), får vi

$$16ab - 64a = 20.$$

Insättning av ab från ekvation (3) i denna ekvation ger

$$8t - 64a = 20,$$

varav

$$a = a_1 = -\frac{5-2t}{16}, \quad b = b_1 = \frac{t}{2a_1}, \quad c = c_1 = 30 - a_1 b_1^2.$$

Värdet av c behövs inte för att räkna ut längden av kurvan, men jag tar med det ändå, så att jag kan rita upp kurvan. Vi noterar också att

$$y'(8) = 2a_1(8 - b_1). \tag{4}$$

Vi bestämmer nu kurvan från B till C. Vi återanvänder bokstäverna a, b och c och poängterar att de kommer att ha andra värden här. Kurvan är i detta fall symmetrisk kring mittpunkten $(8+11)/2 = 19/2$. Därför har den en ekvation av formen $y = a(x-19/2)^2 + c$. Derivatan blir $y' = 2a(x - 19/2)$. Denna kurva skall ha samma lutning då $x = 8$, som den första har. Detta ger att

$$y'(8) = 2a\left(8 - \frac{19}{2}\right) = -3a = 2a_1(8 - b_1)$$

enligt (4), varför

$$a = a_2 = -\frac{2a_1(8-b_1)}{3}.$$

Symmetrin ger att

$$y'(11) = -y'(8) = -2a_1(8 - b_1). \tag{5}$$

Vi bokför också att

$$b = b_2 = \frac{19}{2}, \quad c = c_2 = 10 - a_2\left(8 - \frac{19}{2}\right)^2 = 10 - \frac{9a_2}{4}.$$

Den sista kurvan att bestämma är den från C till D. Vi låter här b vara x-koordinaten för D. Eftersom D är en maximipunkt, är kurvan av formen $y = a(x-b)^2 + 35$. Villkoret $y(11) = 10$ ger

$$a(11-b)^2 = -25. \tag{6}$$

Ekvation (5) och att $y'(11) = 2a(11-b)$ ger att

$$a(11-b) = -a_1(8-b_1). \tag{7}$$

Division av ekvation (6) med ekvation (7) ger

$$11 - b = \frac{25}{a_1(8-b_1)},$$

varav

$$b = b_3 = 11 - \frac{25}{a_1(8-b_1)}.$$

Ekvation (7) ger sedan att

$$a = a_3 = -\frac{a_1(8-b_1)}{11-b_3},$$

och vi vet att $c = c_3 = 35$.

Längden av kurvan

Betrakta kurvan $y = a(x-b)^2 + c$, $x_1 \leq x \leq x_2$. Det gäller som vi såg ovan att

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + 4a^2(x-b)^2}.$$

Längden av kurvan är därför

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + 4a^2(x-b)^2}\, dx.$$

Längden av kurvan i problemet blir

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + L_3 \\ &= \int_0^8 \sqrt{1 + 4a_1^2(x-b_1)^2}\, dx + \int_8^{11} \sqrt{1 + 4a_2^2(x-b_2)^2}\, dx + \int_{11}^{b_3} \sqrt{1 + 4a_3^2(x-b_3)^2}\, dx. \end{aligned}$$

Att beräkna denna längd exakt är knappast meningsfullt, eftersom ett exakt uttryck ändå kommer att innehålla uttrycket $\tan 10°$. Vi behöver de numeriska värdena av a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 och b_3, och därefter behöver vi kunna beräkna integralerna numeriskt. Jag fick följande värden,

$$\begin{aligned} a_1 &= -0{,}2904591274 \\ a_2 &= 1{,}607891006 \\ a_3 &= -0{,}2326782139 \\ b_1 &= -0{,}3035314852 \\ b_2 &= 9{,}5 \\ b_3 &= 21{,}36554505 \end{aligned}$$

och längden av hela kurvan blev 58,18340795.