LUNDS
UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Ett kombinatoriskt problem

Kjell Elfström

Problemet går ut på att bevisa följande sats.

Sats 1 Låt n vara ett positivt heltal. Till varje följd $(a_1, \dots, a_{2n-1})$ av heltal finns det en mängd $I \subseteq \{1, \dots, 2n-1\}$ med n element, sådan att $\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{n}$.

Lemma 1 Låt p vara ett primtal. Då gäller det, att

$$\binom{2p-1}{p} \not\equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{och} \qquad \binom{2p-1-k}{p-k} \equiv 0 \pmod{p}, \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Bevis Om k är ett heltal, sådant att $0 \le k \le p-1$, så är

$$\binom{2p-1-k}{p-k} = \frac{(2p-1-k)(2p-1-k-1)\cdots(p-k+1)}{(p-1)!}.$$

Nämnaren är inte delbar med p. Påståendet följer därför av att p delar täljaren bara om $k > 0$. ■

Definition 1 För en ändlig mängd I definieras $|I|$ som antalet element i I. Om I är en icke-tom mängd, n ett positivt heltal och $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n)$ ett element i I^n, så definierar vi $|\boldsymbol{i}| = |\{i_1, \dots, i_n\}|$.

Lemma 2 Låt p vara ett primtal, $(a_1, \dots, a_{2p-1})$ en följd av heltal och $I = \{1, \dots, 2p-1\}$. Då gäller det, att

$$\sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = p}} \Bigl(\sum_{j \in J} a_j \Bigr)^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Bevis Eftersom

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{J \subseteq I, \\ |J| = p}} \Bigl(\sum_{j \in J} a_j \Bigr)^{p-1} &= \sum_{\substack{J \subseteq I, \\ |J| = p}} \sum_{\boldsymbol{j} \in J^{p-1}} \prod_{i=1}^{p-1} a_{j_i} = \sum_{\boldsymbol{j} \in I^{p-1}} \sum_{\substack{J \subseteq I, \\ |J| = p, \\ J^{p-1} \ni \boldsymbol{j}}} \prod_{i=1}^{p-1} a_{j_i} = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{j} \in I^{p-1}, \\ |\boldsymbol{j}| = k}} \sum_{\substack{J \subseteq I, \\ |J| = p, \\ J^{p-1} \ni \boldsymbol{j}}} \prod_{i=1}^{p-1} a_{j_i} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{\substack{\boldsymbol{j} \in I^{p-1}, \\ |\boldsymbol{j}| = k}} \binom{2p-1-k}{p-k} \prod_{i=1}^{p-1} a_{j_i},
\end{aligned}$$

följer påståendet av lemma 1. ■

Copyright © 2018 by Kjell Elfström

Lemma 3 Låt n vara ett positivt heltal, och antag, att det till varje följd $(a_1, \ldots, a_{2n-1})$ av heltal finns en mängd $I \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$, sådan att $|I| = n$ och $\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{n}$. Då finns det för varje positivt heltal m och varje följd $(a_1, \ldots, a_{2mn-1})$ av heltal $2m-1$ parvis disjunkta delmängder $I_1, \ldots, I_{2m-1}$ till $\{1, \ldots, 2mn-1\}$, sådana att $|I_j| = n$ och $\sum_{i \in I_j} a_i \equiv 0 \pmod{n}$ för $j = 1, \ldots, 2m-1$.

Bevis Vi bevisar lemmat med induktion över m. För $m = 1$ följer påståendet direkt av antagandet i lemmat.

Vi antar, att påståendet är sant för $m = p$, och visar, att det då är sant för $m = p+1$. Sätt $J_m = \{1, \ldots, 2mn-1\}$. Då är $J_p \subseteq J_{p+1}$. Enligt induktionsantagandet finns det därför $2p-1$ parvis disjunkta delmängder $I_1, \ldots, I_{2p-1}$ till J_{p+1}, sådana att $|I_j| = n$ och $\sum_{i \in I_j} a_i \equiv 0 \pmod{n}$ för $j = 1, \ldots, 2p-1$. Mängden $J = J_{p+1} \backslash (\cup_{j=1}^{2p-1} I_j)$ innehåller $2(p+1)n - 1 - (2p-1)n = 3n-1$ element $i_1, \ldots, i_{3n-1}$. Enligt antagandet i lemmat finns det en mängd $K \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$, sådan att $|K| = n$ och $\sum_{k \in K} a_{i_k} \equiv 0 \pmod{n}$. Vi sätter $I_{2p} = \{i_k \mid k \in K\}$ och $J' = J \backslash I_{2p}$. Det gäller då, att J' innehåller $2n-1$ element $j_1, \ldots, j_{2n-1}$. Enligt antagandet i lemmat finns det en mängd $L \subseteq \{1, \ldots, 2n-1\}$, sådan att $|L| = n$ och $\sum_{k \in L} a_{j_k} \equiv 0 \pmod{n}$. Vi sätter $I_{2p+1} = \{j_k \mid k \in L\}$ och kan konstatera, att för $m = p+1$ uppfyller mängderna $I_1, \ldots, I_{2p+1}$ slutsatsen i lemmat, som därmed är bevisat. ■

Bevis för satsen Vi genomför beviset med induktion över n. För $n = 1$ är påståendet trivialt.

Vi antar, att påståendet är sant då $1 \leq n < p$, och bevisar, att det då också är sant för $n = p$.

Antag först, att p är ett primtal. Om påståendet inte är sant för $n = p$, så finns det en följd $(a_1, \ldots, a_{2p-1})$ av heltal, sådan att $\sum_{j \in J} a_j \not\equiv 0 \pmod{p}$ för varje mängd $J \subseteq I = \{1, \ldots, 2p-1\}$ med p element. Fermats lilla sats och lemma 1 ger då i strid med lemma 2, att

$$\sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = p}} \left(\sum_{j \in J} a_j \right)^{p-1} \equiv \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| = p}} 1 \equiv \binom{2p-1}{p} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Detta bevisar påståendet i detta fall.

Om p inte är ett primtal, så är $p = qr$ för några heltal q och r, sådana att $2 \leq q < p$ och $2 \leq r < p$. Enligt induktionsantagandet gäller påståendet för $n = r$. Lemma 3 ger därför, att det finns $2q-1$ parvis disjunkta delmängder $I_1, \ldots, I_{2q-1}$ till $\{1, \ldots, 2p-1\}$, sådana att $|I_j| = r$ och $\sum_{i \in I_j} a_i \equiv 0 \pmod{r}$ för $j = 1, \ldots, 2q-1$. Om

$$s_j = \frac{\sum_{i \in I_j} a_i}{r},$$

så ger induktionsantagandet tillämpat på följden $(s_1, \ldots, s_{2q-1})$, att $\sum_{j \in J} s_j \equiv 0 \pmod{q}$ för någon mängd $J \subseteq \{1, \ldots, 2q-1\}$ med q element. Mängden $I = \cup_{j \in J} I_j$ innehåller $qr = p$ element, och $\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{p}$. ■