Claus Führer 2007-04-16

LUNDS UNIVERSITET

FMA421: Linjär Algebra med Beräkningsintroduktion

Numerisk Analys, Matematikcentrum

Labtentamen 2007-04-17

Regler för datortentamen

- MATLAB frågor besvaras genom att skapa ett textdokument i vilket du överför de relevanta delarna ur MATLAB fönstret. Markera tydligt i dokumentet vilken uppgift du besvarar. Det kan vara nyttigt att använda MATLABs `diary` kommando, men du behöver inte använda det. Textdokumentet får inte överskrida 10 ark. Det skrivs ut och häftas tillsammans med tentamensomslag. Tillfoga gärna handskrivna kommentarer.
- Du får använda en av de två som kurslitteratur rekommenderade MATLAB böcker, handskrivna anteckningar samt alla kursrelaterade filer på ditt konto.
- Nätverkstrafik som e-post, webbrowsing, chat eller dyl är *inte* tillåten. Nättrafiken protokollförs från systemadministrationen.
- Tentamensresultat kommer att anslås på Numerisk Analys anslagstavlan bredvid Café Hilbert i Matematikcentrum senast på onsdag den 28 februari kl. 12.

Uppgifter: 5 Poäng: 20p Godkänt: 10p

Upggift 1 (4p): Skapa i MATLAB en matrix

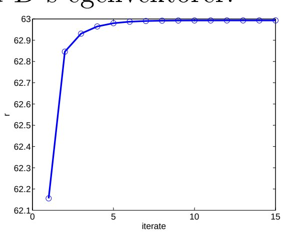
$$D = \begin{pmatrix} 100.0000 & 10.0000 & 0 & 0.5000 \\ 10.0000 & 50.0000 & 5.0000 & 0.1000 \\ 0 & 5.0000 & 10.0000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0.1000 & 1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

och en vektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.
Bilda en följd av vektorer $x^{(i)}$ och tal $r^{(i)}$ med $i = 1, \dots, 15$ så att

$$x^{(i)} = \frac{Dx^{(i-1)}}{\|Dx^{(i-1)}\|_2} \quad \text{och} \quad r^{(i)} = x^{(i)\mathrm{T}} D x^{(i)}$$

Jämför r_{15} med D's egenvärden och x_{15} med D's egenvektorer.

Plotta r mot i i en bild som liknar bilden bredvid.



```
D =

  100.0000   10.0000         0    0.5000
   10.0000   50.0000    5.0000    0.1000
         0    5.0000   10.0000    1.0000
    0.5000    0.1000    1.0000    1.0000

>> x=ones(4,1);

>> hold
Current plot held
>> for i=1:15, Dx=D*x;x=Dx/norm(Dx);r=x'*D*x;plot(i,r,'o'), end
>> eig(D)

ans =

    0.8823
    9.4822
   48.6972
  101.9383

>> r-ans(4)

ans =

 -7.4570e-009
```

Uppgift 2 (4p): Ställ upp i MATLAB det följande överbestämda ekvationssystemet $Ax = b$ med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \\ -40 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

Lös systemet mha minsta kvadratmetoden. Beräkna residualen och testa om den är ortogonal mot A's kolonner. Reda ut mha MATLABs kommando `rank` om b ligger i A's kolonnrum (bildrum).

```
A =

     1     2     3
    -2    -2     1
     5     4     1
     1     3    -4
     0     0     1

>> b=[3,4,17,-40,4.5]'
```

```
b =

    3.0000
    4.0000
   17.0000
  -40.0000
    4.5000

>> x=A\b

x =

   11.2890
  -11.0032
    4.5682

>> r=A*x-b

r =

   -0.0130
   -0.0032
    0.0000
    0.0065
    0.0682

>> A'*r

ans =

  1.0e-013 *

    0.6573
    0.9059
    0.4086

>> rank(A)

ans =

     3

>> rank([A,b])

ans =

     4
```

Uppgift 3 (4p): Definera i MATLAB en vektor

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och en vinkel $\alpha = \pi/6$. Sätt upp i MATLAB en matris R på följande sätt:

$$R = c\,\mathrm{I} + t\,xx^{\mathrm{T}} + s \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

med $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha, t = 1 - c$ och I är enhetsmatrisen.
Visa att R är en rotationsmatris i $\mathbb{R}^3$ som beskriver en rotation kring x.

```
>> x=1/sqrt(3)*[1,-1,1]'

x =

    0.5774
   -0.5774
    0.5774

>> alpha=pi/6;c=cos(alpha);s=sin(alpha);t=1-c;

>> R=c*eye(3)+t*x*x'+s*[0,-x(3),x(2);x(3),0,-x(1);-x(2),x(1),0];

>> det(R)

ans =

     1

>> R'*R

ans =

    1.0000   -0.0000         0
   -0.0000    1.0000   -0.0000
         0   -0.0000    1.0000

>> R*R'

ans =

    1.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000    1.0000         0
    0.0000         0    1.0000
```

```
>> [X,La]=eig(R)

X =

  -0.2887 + 0.5000i  -0.2887 - 0.5000i   0.5774
   0.2887 + 0.5000i   0.2887 - 0.5000i  -0.5774
   0.5774             0.5774             0.5774


La =

   0.8660 + 0.5000i        0                  0
        0             0.8660 - 0.5000i        0
        0                  0             1.0000

>> X(:,3)-x

ans =

  1.0e-015 *

    0.2220
    0.2220
   -0.1110
```

Uppgift 4 (4p): I föreläsningsanteckningar angavs hur 2-normen av en matris kan beräknas:

2-norm : $\|A\|_2 = \max_{i=1:n} \sqrt{\lambda_i(A^{\mathrm{T}}A)}$

where $\lambda_i(A^{\mathrm{T}}A)$ is the i^{th} eigenvalue of $A^{\mathrm{T}}A$.

Använd denna formel för att beräkna i MATLAB 2-normen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jämför ditt resultat med resultatet som MATLABs kommando `norm` ger.

Någon påstår att alla icke inverterbara matriser (singulära matriser) har 2-normen noll. Är påståendet sant? Motivera ditt svar.

```
>> A=[2,-2;4,-4]

A =

     2    -2
     4    -4
```

```
>> max(sqrt(eig(A'*A)))

ans =

    6.3246

>> norm(A)

ans =

    6.3246
```

Uppgift 5 (4p): Du känner från kursen MATLABs kommandot `diag`. I den här uppgiften skall du programmera ett eget sådant kommando. Det skall heta `bidiag` och skall skapa en matris. Programmet skall placera vektorern d_1 i matrisens diagonal och vektorn d_2 ovanpå. Resten av matrisen består av nollor.
Komplettera koden:

```
function D=bidiag(d1,d2)
%    This program generates a n x n matrix D which has
%    the vector d1 on its diagonal and the vector d2 above
%    d1 must be a vector of dimension n
%    d2 must be a vector of dimension n-1
n=length(d1)

for ...

(skriv programmet fardig)
```

Välj själv två vektorer och testa ditt programm. Jämför med MATLABs kommandon

```
D=diag(d1)+diag(d2,1)
```

```
function D=bidiag(d1,d2)
%    This program generates a n x n matrix D which has
%    the vector d1 on its diagonal and the vector d2 above
%    d1 must be a vector of dimension n
%    d2 must be a vector of dimension n-1
n=length(d1)
D=zeros(n,n)

for i=1:n
    D(i,i)=d1(i);
end
for i=1:n-1
    D(i,i+1)=d2(i);
```

```
    end
```

Lycka till!