LUNDS UNIVERSITET

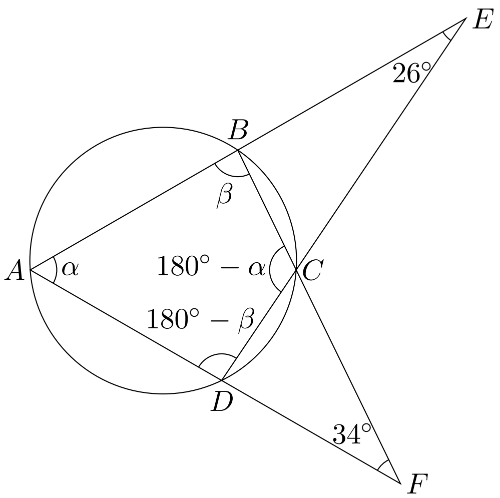
Matematikcentrum

Matematik NF

Matematik för lärare
Lördag den 11 december 2010
Skrivtid: 08.00–13.00

Lösningar

1.

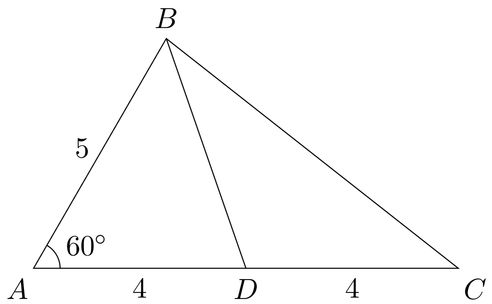


Summan av motstående vinklar i fyrhörningen är 180°, eftersom den är inskriven i en cirkel. $\triangle ABF$ och $\triangle ADE$ har vinkelsummorna 180°, vilket ger att

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 34^\circ &= 180^\circ, \\ \alpha + 180^\circ - \beta + 26^\circ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Detta ger att $\alpha = 60^\circ$ och $\beta = 86^\circ$, varav $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 86^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, och $\angle D = 94^\circ$.

2.



Cirkeln är omskriven kring $\triangle BCD$. Cosinussatsen ger att

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos 60^\circ = 21, \\ BC^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 60^\circ = 49, \end{aligned}$$

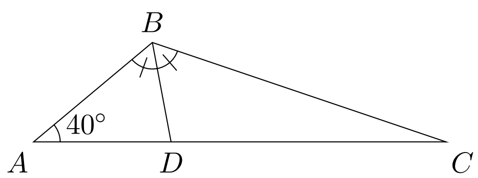
varav $BD = \sqrt{21}$ och $BC = 7$. Arean av $\triangle BCD$ är

$$\frac{4 \cdot 5 \sin 60^\circ}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Det följer att den omskrivna cirkelns radie är

$$\frac{4 \cdot 7 \cdot \sqrt{21}}{4 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{7}}{5} \text{ cm.}$$

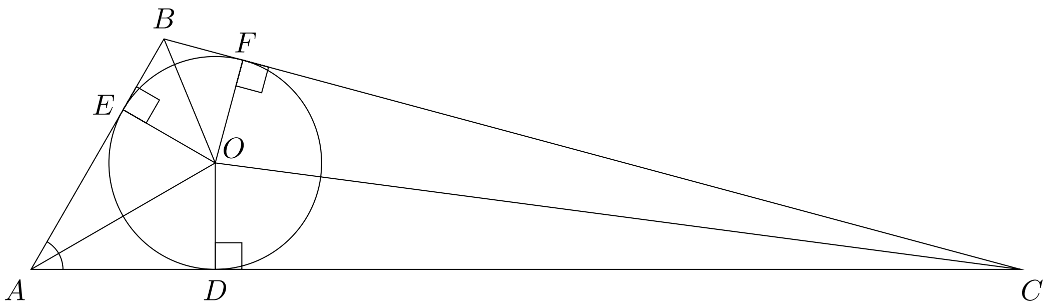
3.



Eftersom $\triangle ABD$ och $\triangle DCB$ har samma höjd, så förhåller sig deras baser som deras areor. Det ger att $CD = 2AD$, och bisektrissatsen ger att $BC = 2AB$. Sinussatsen ger därför att $\sin C = (\sin 40^\circ)/2$, varav $C \approx 18{,}75^\circ$, eftersom $C \approx (180 - 18{,}75)^\circ$ skulle ge för stor vinkelsumma. $A = 40^\circ$ enligt förutsättningarna, och det följer att $B = 180^\circ - A - C \approx 121{,}25^\circ$.

Var god vänd!

4.



Vi antar att sidan AB är 5 cm och att vinkeln A är 60°. Cirkelns medelpunkt O är bisektrisernas skärningspunkt. Därför är $\angle DAO = 30°$, och eftersom $OD = 2$, så är $AD = AE = 2\sqrt{3}$. Det följer att $BE = BF = 5 - 2\sqrt{3}$. Sätt $x = CD = CF$. Enligt cosinussatsen är $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60°$, vilket ger att

$$(5 - 2\sqrt{3} + x)^2 = 5^2 + (2\sqrt{3} + x)^2 - 5(2\sqrt{3} + x).$$

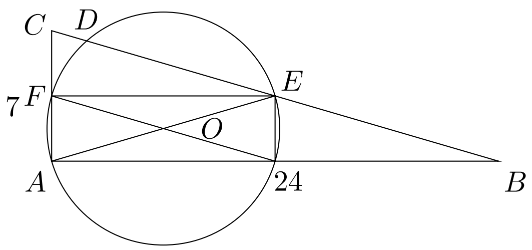
Löser man ut x, så får man $x = \frac{50\sqrt{3}+80}{11}$. Triangelns halva omkrets är

$$AE + EB + CD = 5 + x = \frac{50\sqrt{3} + 135}{11},$$

och formeln för den inskrivna cirkelns radie ger, att triangelarean är

$$2 \cdot \frac{50\sqrt{3} + 135}{11} = \frac{100\sqrt{3} + 270}{11} \text{ cm}^2.$$

5.



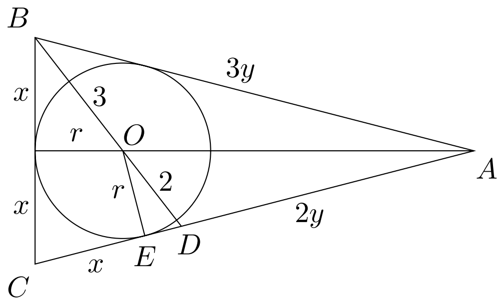
$BC = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ enligt Pythagoras sats, varav $CE = 25/2$. Likformighet ger att $AF = 7/2$. Av kordasatsen följer att

$$CD \cdot \frac{25}{2} = \frac{7}{2} \cdot 7,$$

varav $CD = 49/25$. Detta ger att

$$DE = CE - CD = \frac{25}{2} - \frac{49}{25} = \frac{527}{50} \text{ cm}.$$

6.



Bisektriserna skär varandra i punkten O. Om $AB = 3y$, ger bisektrissatsen tillämpad på bisektrisen AO och $\triangle ABD$, att $AD = 2y$. Detta ger att $CD = y$. Bisektrissatsen tillämpad på bisektrisen BD ger sedan att

$$\frac{y}{2x} = \frac{2y}{3y} = \frac{2}{3},$$

varav $4x = 3y$. Det gäller att $r^2 = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$ och $DE^2 = 2^2 - r^2 = x^2 - 5$. Vi får att $4x = 3y = 3(x + \sqrt{x^2 - 5})$, varav $x = 3\sqrt{x^2 - 5}$. Det följer att $x = \frac{3}{4}\sqrt{10}$, och sidorna är

$$2x = \frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ cm} \quad \text{och} \quad 3y = 3\sqrt{10} \text{ cm}.$$