LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2018–08–23

1. a) Enligt sats 9.1 räcker det att undersöka om integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,dt$ är konvergent. Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-t}\,dt = 2.$$

Alltså är systemet insignal-utsignalstabilt.

b) Problemet kan lösas både med Fourier- och Laplacetransformering. Men sannolikt blir det lättast med Fouriertransformering. Sätt $h(t) = e^{-|t|}$ och låt w vara den insignal som söks. Då gäller att

$$h * w(t) = te^{-|t|}.$$

Fouriertransformering ger i kombination med faltningssatsen och reglerna (17) och (12) att

$$\frac{2}{1+\omega^2}\cdot \hat{w} = i\frac{d}{d\omega}\frac{2}{1+\omega^2} = -i\frac{4\omega}{(1+\omega^2)^2} \Leftrightarrow \hat{w} = -i\omega\frac{2}{1+\omega^2}.$$

Inverstransformering ger då att

$$w(t) = -\frac{d}{dt}e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & \text{om } t>0 \\ -e^{t} & \text{om } t<0 \end{cases} = \operatorname{sign} t\cdot e^{-|t|}.$$

Svar: Den sökta insignalen är $\operatorname{sign} t\cdot e^{-|t|}$.

c) Låt h liksom i b) beteckna impulssvaret. Då ges stegsvaret av

$$\theta * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}\,d\tau.$$

Om $t<0$ blir

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\,d\tau = [e^{\tau}]_{-\infty}^{t} = e^{t}.$$

Om $t \geq 0$ gäller att

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-|\tau|}\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\,d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau}\,d\tau = 1+1-e^{-t} = 2-e^{-t}..$$

Svar: Stegsvaret blir $(2-e^{-t})\theta(t) + e^{t}(1-\theta(t)) = 2(1-\cosh t)\theta(t) + e^{t}$.

2. Enligt formel (42) i formelsamlingen kan vi förenkla det givna högerledet. Alltså gäller att

$$ty'' + y' = (ty'(t))' = t\,\delta(t-2) \Leftrightarrow (ty'(t))' = 2\delta(t-2) \Leftrightarrow ty'(t) = 2\theta(t-2) + A \Leftrightarrow$$
$$y'(t) = \frac{2}{t}\theta(t-2) + \frac{A}{t} \tag{1}$$

där A är en konstant. Det är nu viktigt att vi i nästa steg väljer en kontinuerlig primitiv funktion till högerledet, ty höger led i (1) innehåller ej $\delta(t-2)$. Vi får alltså att

$$y(t) = 2(\ln t - \ln 2)\theta(t-2) + A\ln t + B$$

där konstanterna A och B bestäm av att $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 1$. Vi ser att $A = 0$ och $B = 1$.

Svar: $y(t) = 2(\ln t - \ln 2)\theta(t-2) + 1$.

3. Integralekvationen är en faltningsekvationen. Sätt $z(t) = y(t)\theta(t)$ och multiplicera ekvationen med θ:

$$z'(t) + 2z(t) + z(t) * e^{-2t}\theta(t) = 10 \cdot \theta(t).$$

Laplacetransformering ger (med $Z(s) = \mathcal{L}(z(t))(s)$)

$$sZ(s) + 2Z(s) + Z(s)\frac{1}{s+2} = \frac{10}{s}$$

eller

$$\begin{aligned} Z(s) = 10\frac{s+2}{s((s+2)^2+1)} &= \frac{4}{s} - \frac{4s+6}{(s+2)^2+1} \\ &= \frac{4}{s} - 4\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1}. \end{aligned}$$

Inverstransformering ger

$$y(t)\theta(t) = 4\theta(t) - 4e^{-2t}\cos(t)\theta(t) + 2e^{-2t}\sin(t)\theta(t).$$

Notera att $\lim_{t\to 0} y(t)\theta(t) = 0$ och $y(t)\theta(t)$ är kontinuerlig.

4. a) Vi beräknar den (komplexa) partikulärlösningen med drivfaktor

$$\mathbf{f}e^{2it} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{2it}.$$

eftersom $\cos(t) = \Re(e^{2it})$. Då fås att

$$R_A(2i)\mathbf{f} = \frac{1}{4+12i}\begin{bmatrix} 3+2i & 1 \\ 1 & 3+2i \end{bmatrix}\mathbf{f} \cdot e^{2it} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 19-17i \\ 11-13i \end{bmatrix} \cdot e^{2it}.$$

Vi tar realdelen och får

$$\begin{cases} x_1^p(t) = \frac{1}{40}(19\cos(2t) + 17\sin(2t)) \\ x_2^p(t) = \frac{1}{40}(11\cos(2t) + 13\sin(2t). \end{cases}$$

Egenvärden och egenvektorer är

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2, s_1 = (1,1) \\ \lambda_2 = -4, s_2 = (-1,1). \end{cases}$$

Detta ger

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^{-2t} - c_2e^{-4t} + \frac{1}{40}(19\cos(2t) + 17\sin(2t)) \\ x_2(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-4t} + \frac{1}{40}(11\cos(2t) + 13\sin(2t)). \end{cases}$$

Ur begynnelsevärdena fås

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{1}{10}e^{-4t} + \frac{1}{40}(19\cos(2t) + 17\sin(2t)) \\ x_2(t) = -\frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t} + \frac{1}{40}(11\cos(2t) + 13\sin(2t)). \end{cases}$$

Här är

$$\begin{cases} x_1^{tr}(t) = -\frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{1}{10}e^{-4t} \\ x_2^{tr}(t) = -\frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t} \end{cases}$$

den transienta delen och

$$\begin{cases} x_1^{st}(t) = \frac{1}{40}(19\cos(2t) + 17\sin(2t)) \\ x_2^{st}(t) = \frac{1}{40}(11\cos(2t) + 13\sin(2t)) \end{cases}$$

den stationära.

b) Nej. Ekvationen $(s \cdot I - A)x = \mathbf{f}$ saknar lösning eftersom $s = -2$ är ett egenvärde till A.

c) Vi ansätter

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cdot te^{-2t} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-2t}$$

för en partikulärlösning. Då får vi $A_1 = 2, A_2 = 2, B_1 = 0, B_2 = 1$ och

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2t + c_1)e^{-2t} - c_2e^{-4t} \\ (2t + 1 + c_1)e^{-2t} + c_2e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

5.a) Egenvärde och respektive egenvektorer till A är

$$\lambda_1 = -2 + i, \qquad c(1, -i)', \qquad c \neq 0$$

och

$$\lambda_1 = -2 - i, \qquad c(1, i)^T, \qquad c \neq 0.$$

Det ger

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-(2-i)t} & 0 \\ 0 & e^{-(2+i)t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & -e^{-2t}\sin t \\ e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{bmatrix}$$

b) Med hjälp av Laplacetransformen kan vi beräkna

$$\begin{aligned} e^{At}\theta(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left((sI - A)^{-1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+2)^2+1} & -\frac{1}{(s+2)^2+1} \\ \frac{1}{(s+2)^2+1} & \frac{s+2}{(s+2)^2+1} \end{bmatrix}^{-1}\right) \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & -e^{-2t}\sin t \\ e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{bmatrix}\theta(t). \end{aligned}$$

Eftersom det är ett analytiskt uttryck för $t > 0$ gäller där för alla t

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & -e^{-2t}\sin t \\ e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t \end{bmatrix}.$$

c) Enligt satserna 6.9, 6.10 och 6.11 (Spektralsats för symmetriska matriser) är A diagonaliserbar och har reella egenvärder $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n$. Därför har e^{At} egenvärder $e^{\lambda_i t} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Det medför att e^{At} är positivt definit (Kapitel 7.4).

6. Med $f(t) = e^{-t}\theta(t)$ kan ekvationen skrivas

$$y(t) + y * f(t) = w(t).$$

Fouriertransformering ger att

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1 + i\omega}{2 + i\omega}\pi(\theta(\omega + 2) - \theta(\omega - 2)).$$

Parsevals formel ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt = \pi \int_0^2 \frac{1 + \omega^2}{4 + \omega^2} \, d\omega = \pi \left(2 - \frac{3\pi}{8}\right)$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega(t)|^2 \, dt = 2\pi.$$

Alltså blir $E = 1 - \dfrac{3\pi}{16}$.