LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
System och Transformer
2018-05-30 kl 14-19

1. a) Det karaktäristiska polynomet $det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 9$ har två nollställe $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 4$. En egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = -2$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, och en egenvektor med egenvärdet $\lambda_2 = 4$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En allmänn lösning av den homogena differentialekvationen är

$$\mathbf{x_h}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi söker efter en partikulärlösning

$$\mathbf{x_p}(t) = (I - A)^{-1} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{-9} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{e^t}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den sökta allmänna lösningen är

$$\mathbf{x}(t) = c_1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^t}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Matrisen A har tre egenvärde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = b$. Då $b \neq 1$ Har matrisen A två linjärt oberoende egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, och en egenvektor för matrisen $\lambda_3 \neq 1$. Så är A diagonaliserbar. För $b = 1$ har matrisen A bara två linjärt oberoende egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket medför att A inte är diagonoliserbar.

2. a) En allmänn lösning

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1\, (-2)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Systemet är instabil, därför att $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = 4 > 1$.

c) Matrisen $2A^{100}+3A^{200}$ har en egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ med egenvärdet $\lambda_1 = 2(-2)^{100}+3(-2)^{200}$, och en egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenvärdet $\lambda_2 = 2 \cdot 4^{100} + 3 \cdot 4^{200}$. En allmänn lösning av systemet är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1 \left(2(-2)^{100} + 3(-2)^{200}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \left(2 \cdot 4^{100} + 3 \cdot 4^{200}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. a). Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^3\mathcal{L}(y)(s) + 3s^2\mathcal{L}(y)(s)2s\mathcal{L}(y)(s) = 1,$$

vilket medför

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s},$$

som har tre enkla poler $-2. -1, 0$. Residyerna av funktionen $\frac{e^{ts}}{s^3+3s^2+2s}$ i spunkterna är

$$Res\left(\frac{e^{ts}}{s^3 + 3s^2 + 2s}, -2\right) = \left.\frac{e^{ts}}{(s^3 + 3s^2 + 2s)'}\right|_{s=-2}$$

$$= \left.\frac{e^{ts}}{3s^2 + 6s + 2}\right|_{s=-2} = \frac{e^{-2t}}{2},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}}{s^3 + 3s^2 + 2s}, -1\right) = \left.\frac{e^{ts}}{3s^2 + 6s + 2}\right|_{s=-1} = -e^{-t},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}}{s^3 + 3s^2 + 2s}, -0\right) = \left.\frac{e^{ts}}{3s^2 + 6s + 2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}.$$

Den sökta kausala lösningen är

$$y(t) = \theta(t)\left(\frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}\right).$$

b) Ensidig Laplacetransformering av ekvationen ger

$$s^2\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(y)(s) - 1 + 3s\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(y)(s) + 2\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(y)(s) = \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(\theta(t-1))(s),$$

där

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(\theta(t-1))(s) = \mathcal{L}(\theta(t)\theta(t-1))(s) = \mathcal{L}(\theta(t-1))(s) = \frac{e^{-s}}{s}.$$

Så är

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(y)(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} + \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + e^{-s}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}\right).$$

Vi får

$$y(t)\theta(t) = e^{-t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(t) + \frac{1}{2}\theta(t-1) - e^{-t+1}\theta(t-1) + \frac{1}{2}e^{-2t+2}\theta(t-1).$$

Speciellt för $t > 0$ gäller

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t} + \left(\frac{1}{2} - e^{-t+1} + \frac{1}{2}e^{-2t+2}\right)\theta(t-1).$$

En direkt verifiering medför att funktionen $y(t)$ uppfyller begynnelsevärdena. Så är funktionen $y(t)$ den sökta lösningen.

4. a) Uttrycka funktionen $f(t)$ som

$$f(t) = (2t^2+1)\left(\theta(t) - \theta(t-1)\right).$$

Distributionsderivatan är

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t\left(\theta(t) - \theta(t-1)\right) + (2t^2+1)\left(\delta(t) - \delta(t-1)\right) \\ &= 4t\left(\theta(t) - \theta(t-1)\right) + \delta(t) - 3\delta(t-1), \end{aligned}$$

Primitiva distributionerna är

$$\left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\theta(t) - \left(\frac{2}{3}t^3 + t - \frac{5}{3}\right)\theta(t-1) + C.$$

(b) Systemet $\mathcal{S}$ har stegsvaret $\mathcal{S}(\theta)(t) = f(t)$ och alltså dess impulsvar är

$$h(t) = f'(t) = 4t\left(\theta(t) - \theta(t-1)\right) + \delta(t) - 3\delta(t-1).$$

Eftersom $f(t) = h(t) * \theta(t) = (h(t) * t\theta(t))'$, får vi att systemets svar på insignalen $t\,\theta(t)$ är den kausala primitiva distributionen av $f(t)$, dvs.

$$\left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\theta(t) - \left(\frac{2}{3}t^3 + t - \frac{5}{3}\right)\theta(t-1).$$

5. Förutsättningarna implicerar

$$\begin{cases} h * w = -3\theta(t)\sin t \\ h * w * w = 9\,\theta(t)\left(-1 + \cos t\right). \end{cases}$$

Laplacetransformering medför

$$\begin{cases} \mathcal{L}(h)\,\mathcal{L}(w) = \frac{-3}{s^2+1} \\ \mathcal{L}(h)\,\mathcal{L}(w)\,\mathcal{L}(w) = -\frac{9}{s} + \frac{9s}{s^2+1}. \end{cases}$$

Så är

$$\mathcal{L}(w) = -\frac{s^2+1}{3}\left(-\frac{9}{s} + \frac{9s}{s^2+1}\right) = 3s + \frac{3}{s} - 3s = \frac{3}{s},$$

som medför att $\mathcal{L}(h) = \frac{-s}{s^2+1}$ och alltså $h(t) = -\cos(t)\theta(t)$.
Omskriva $w_1(t) = (t\theta(t))^2$ som $w_1(t) = t^2\theta(t)$. Systemets svar på insignalen $w_1(t)$ är

$$\begin{aligned} h(t) * w_1(t) = -\cos(t)\theta(t) * t^2\theta(t) &= -\theta(t)\int_0^t \tau^2\cos(t-\tau)d\tau \\ &= 2\theta(t)\left(\sin t - t\right). \end{aligned}$$

6. a) Från Formelbladet har vi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(te^{-9t^2}\right)(w) = i\frac{d}{d\,w}\mathcal{F}\left(e^{-(3t)^2}\right)(w) &= \frac{i}{3}\frac{d}{d\,w}\mathcal{F}\left(e^{-(t)^2}\right)(\frac{w}{3}) \\ = \frac{i\sqrt{\pi}}{3}\frac{d}{d\,w}e^{-\frac{w^2}{36}} &= -\frac{i\sqrt{\pi}}{54}\,w\,e^{-\frac{w^2}{36}}, \end{aligned}$$

och

$$\mathcal{F}^{-1}\left(te^{-9t^2}\right)(w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(te^{-9t^2}\right)(-w) = \frac{i}{108\sqrt{\pi}}\,w\,e^{-\frac{w^2}{36}}.$$

b) Parsevals formel ger

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(g*g*g(t)\Big)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathcal{F}(g*g*g)(w)\Big)^2 dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\widehat{g}(w)\Big)^6 dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{3}e^{-\frac{w^2}{36}}\Big)^6 dw = \frac{\pi^2}{2\cdot 3^6}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{w^2}{6}}\,dw = \frac{\pi^2}{2\cdot 3^6}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i0w}e^{-\frac{w^2}{6}}\,dw$$

$$= \frac{\pi^2}{2\cdot 3^6}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{6}}\right)(0) = \frac{\pi^2\sqrt{6\pi}}{2\cdot 3^6}.$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g*g*g(t)\,dt = \mathcal{F}\left(g*g*g(t)\right)(0) = (\widehat{g}(0))^3 = \Big(\frac{\sqrt{\pi}}{3}e^{-\frac{0^2}{36}}\Big)^3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{27}.$$