LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
System och Transformer
2017-05-31 kl 14-19

1. a) $f'(t) = 2\theta(t) + (2t+1)\,\delta(t) = 2\theta(t) + \delta(t)$ och $f''(t) = 2\delta(t) + \delta'(t)$.
b) Alla primitiva distributioner av $f(t)$ ges av

$$\left(t^2 + t\right)\theta(t) + C.$$

Men $F(1) = 3$. Så är $C = 1$ och den sökta primitiva distributionen är

$$\left(t^2 + t\right)\theta(t) + 1.$$

c) $(F' * f)' = (F'' * f) = f' * f = (2\theta(t) + \delta(t)) * f = (2\theta(t)) * ((2t+1)\,\theta(t)) + f(t)$

$$= 2\theta(t) \int_0^t (2\tau + 1)\,d\tau + (2t+1)\,\theta(t) = \left(2t^2 + 4t + 1\right)\theta(t)$$

2. Laplacetransformering av ekvationen medför

$$s^2\mathcal{L}(y)(s) - 2s\mathcal{L}(y)(s) - 3\mathcal{L}(y)(s) = s + 5,$$

som ger

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s+5}{s^2 - 2s - 3} = \frac{(s+1) + (s+1) - (s-3)}{(s+1)(s-3)} = \frac{2}{(s-3)} - \frac{1}{(s+1)}.$$

Vi får en begränsad lösning $y(t) = 2e^{3t}\,(\theta(t) - 1) - e^{-t}\theta(t)$.

3. a) Det karaktäristiska polynomet $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ har två nollställe $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$. En egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = -1$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, och en egenvektor med egenvärdet $\lambda_2 = 3$ är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sätt $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Så är $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $A = S\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}S^{-1}$. Så gäller

$$e^{t\,A} = S\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

b) Vi söker efter en partikulärlösning

$$\mathbf{x_p}(t) = (I - A)^{-1}\,e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} = -\frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En allmänn lösning är

$$\mathbf{x}(t) = c_1\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. a) Det karaktäristiska polynomet $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 7)$ har två nollställe $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 7$. En egenvektor med egenvärdet $\lambda_1 = 3$ är $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, och en egenvektor med egenvärdet $\lambda_2 = 7$ är $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. En partikulärlösning lösning ges av

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En allmänn lösning av systemet är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1 3^k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 7^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Inför

$$\begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

medför

$$\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-2} \\ y_{k-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix},$$

så gäller

$$\begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{k-1} \\ t_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ur a) vet vi

$$\begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = c_1 3^k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 7^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

vilket medför att

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \left(\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_1 3^k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{m} c_2 7^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \frac{3-3^{m+1}}{1-3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \frac{7-7^{m+1}}{1-7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{m}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Men villkoret $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ medför att $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Insättning ger $c_1 = -\frac{1}{12}$ och $c_2 = -\frac{1}{84}$. Så har vi lösningen

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \frac{1-3^m}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1-7^m}{72} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{m}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. a) $\mathcal{F}\left(t\,e^{-2|t|}\right)(w) = i\frac{d}{dw}\mathcal{F}\left(e^{-2|t|}\right)(w) = \frac{i}{2}\frac{d}{dw}\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\frac{w}{2}) = \frac{i}{2}\frac{d}{dw}\frac{2}{1+(\frac{w}{2})^2} = \frac{-8wi}{(4+w^2)^2}$.

$$\mathcal{F}^{-1}\left(t\,e^{-2|t|}\right)(w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(t\,e^{-2|t|}\right)(-w) = \frac{4wi}{\pi(4+w^2)^2}.$$

b) Parsevals formel ger

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}\sin(a\,t)}{t}\,dt = \lim_{a\to\infty}2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}\cdot\frac{\theta(-w+a)-\theta(-w-a)}{4\pi}\,dw$$

$$= \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}(\theta(w+a)-\theta(w-a))\,dw = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}\,dw$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}\,dw = \pi\mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}\right)(0) = \frac{\pi}{1+0^2} = \pi.$$

6. a) Funktionen $H(s) = \frac{1}{s^3+1}$ har tre enkla poler $-1,\ e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
Residyerna till funktionen $e^{ts}H(s)$ i dessa punkter blir

$$Res\left(\frac{e^{ts}}{s^3+1}, -1\right) = \left.\frac{e^{ts}}{(s^3+1)'}\right|_{s=-1} = \left.\frac{e^{ts}}{3s^2}\right|_{s=-1} = \frac{e^{-t}}{3},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}}{s^3+1}, e^{-\frac{\pi}{3}i}\right) = \left.\frac{e^{ts}}{(s^3+1)'}\right|_{s=e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \left.\frac{e^{ts}}{3s^2}\right|_{s=e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \frac{e^{\frac{t}{2}}e^{\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)i}}{3},$$

$$Res\left(\frac{e^{ts}}{s^3+1}, e^{\frac{\pi}{3}i}\right) = \left.\frac{e^{ts}}{(s^3+1)'}\right|_{s=e^{\frac{\pi}{3}i}} = \left.\frac{e^{ts}}{3s^2}\right|_{s=e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{e^{\frac{t}{2}}e^{\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)i}}{3},$$

Den sökta kausala lösningen är

$$y(t) = \theta(t)\left(\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{\frac{t}{2}}e^{\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)i}}{3} + \frac{e^{\frac{t}{2}}e^{\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)i}}{3}\right) = \frac{\theta(t)}{3}\left(e^{-t} + 2e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

b)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{s^2}}{1-e^{-s}}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ks}e^{s^2}\right)(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-ks}e^{s^2}\right)(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left(e^{s^2}\right)(t-k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{\pi}e^{s^2/4}\right)(\frac{t-k}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{t-k}{2}\right)^2}.$$