LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2017–04–20

1. a)

$$f''(t) = \delta(t) + \theta(t-1) + \delta(t-2).$$

c) Funktionen är deriverbar i vanlig mening i punkterna

$$t \in (-\infty, 0) \cup (0,2) \cup (2,\infty).$$

2. Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 3sW(s) + 2W(s).$$

Detta leder till

$$H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{3s+2}{(s+2)(1+s)} = \frac{4}{s+2} - \frac{1}{s+1}.$$

Kausal inverstransformering ger

$$h(t) = (4e^{-2t} - e^{-t})\theta(t)$$

vilket är impulssvaret. Stegsvaret fås genom integration

$$S(\theta)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)\,dt = (e^{-t} - 2e^{-2t} + 1)\theta(t).$$

Svaret på $w(t) = e^t\theta(t)$ fås genom samma metod.

$$Y(s) = H(s)W(s) = \frac{3s+2}{(s+2)(s+1)(s-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{4}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{5}{6}\frac{1}{s-1}.$$

Inverstransformering ger

$$y(t) = S(e^t\theta(t)) = \frac{1}{2}e^{-t}\theta(t) - \frac{4}{3}e^{-2t}\theta(t) + \frac{5}{6}e^{t}\theta(t).$$

3.a) i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iv)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) En generaliserad stationär lösning finns för alla s som är inte egenvärde till systemmatrisen, dvs. $s \neq 5$ och $s \neq -1$.

c) Systemet är insignal/utsignalstabilt om (2×2)-systemmatrisen A uppfyller $\mathbf{tr}(A) < 0$ och $\mathbf{det}(A) > 0$ (Sats 4.11 i boken). Det betyder:

$$a + d < 0 \qquad ad - bc > 0.$$

4. Efter multiplicering med $\theta(t)$ får vi faltningsekvationen

$$2e^{-t}\theta(t) * y(t)\theta(t) - ty(t)\theta(t) = 0.$$

Laplacetransformering ger

$$Y'(s) + \frac{2}{s+1}Y(s) = 0$$

med lösningen

$$Y(s) = \frac{C}{(s+1)^2}.$$

Inverstransformering ger

$$y(t)\theta(t) = Cte^{-t}\theta(t).$$

Insättning av begynnelsevärde.

$$y(t)\theta(t) = te^{1-t}\theta(t) \quad \text{ eller } \quad y(t) = te^{1-t},\ t > 0.$$

5.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} f(t)\,dt = \int_{-T_0}^{0} \frac{t+T_0}{T_0} e^{-it\omega}\,dt + \int_{0}^{T_0} \frac{-t+T_0}{T_0} e^{-it\omega}\,dt \\ &= -\frac{1}{i\omega}e^{i\omega T_0} + \frac{1}{T_0\omega^2}(1 - e^{i\omega T_0}) - \frac{1}{i\omega}(1 - e^{i\omega T_0}) + \frac{1}{i\omega}e^{-i\omega T_0} + \frac{1}{T_0\omega^2}(1 - e^{-i\omega T_0}) + \frac{1}{i\omega}(1 - e^{-i\omega T_0}) \\ &= \frac{2}{T_0\omega^2}(1 - \cos(\omega T_0)). \end{aligned}$$

Med hjälp av parseval's formel får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{4}{3}\pi T_0.$$

6.a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g_{n-1}(t) &= \frac{d}{dt}\left((-1)^{n-1} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\left(\left(\frac{d}{dt}e^{\frac{t^2}{2}}\right)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{-t^2} + e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\left(te^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{-t^2} + (-1)^n g_n(t)\right) \\ &= tg_{n-1}(t) - g_n(t). \end{aligned}$$

b) Låt $\mathcal{F}(f)$ beteckna Fouriertransformen av f.
Vi har

$$\mathcal{F}(g_0)(t) = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

och därför $\mathcal{F}(g_0) = \lambda_0 g_0$ med $\lambda_0 = \sqrt{2\pi}$.
Vi antar att $\mathcal{F}(g_{n-1}) = \lambda_{n-1}g_{n-1}$ gäller. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g_n)(t) &= i\mathcal{F}(-itg_{n-1})(t) - \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}g_{n-1}(t)\right) \\
&i\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F}(g_{n-1})(t)\right) - it\mathcal{F}(g_{n-1})(t) \\
&= -i\left(t\mathcal{F}(g_{n-1})(t) - \frac{d}{dt}(\mathcal{F}(g_{n-1}(t)))\right) \\
&= -i\left(t\lambda_{n-1}g_{n-1}(t) - \frac{d}{dt}(\lambda_{n-1}g_{n-1}(t))\right) \\
&= -i\lambda_{n-1}g_n(t) = \lambda_n g_n(t)
\end{aligned}$$

med $\lambda_n = -i\lambda_{n-1}$. Upprepa argumentet för alla $n \in \mathbb{N}$ och vi får

$$\lambda_0 = \sqrt{2\pi} \quad \text{och} \quad \lambda_n = \sqrt{2\pi}i^{-k}\ n \in \mathbb{N}.$$