

**HJÄLPMEDEL:** Utdelat formelblad för System och transformers.  
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Undersök följande insignal-utsignal relationer med avseende på linearitet, tidsinvarians och kausalitet:  $y(t) = Sw(t) =$

a)  $w(t - 5)$ ,    b)  $w'(t) \cdot w''(t)$ ,    c)  $w(t + 1) \cdot \cos(t)$ .

Bara svar krävs. Fyra rätta svar (av sammanlagt nio) ger inga poäng, därefter ger varje rätt svar 0.2 poäng.

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Beräkna alla egenvärden och egenvektorer till denna matris. Beräkna också potensmatrisen  $A^n$ . (0.6)

b) Lös det tidsdiskreta begynnelsevärdesproblemet

$$x(k+1) = A \cdot x(k), k = 0, 1, 2, \dots, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

där  $x(k) = [x_0(k) \ x_1(k)]^T$ . (0.2)

c) Vad kan man säga om förhållandet mellan  $x_0(k)$  och  $x_1(k)$  om  $k$  är stort? (0.2)

3. Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Beräkna exponentialmatrisen  $e^{At}$ . (0.5)

b) Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \mathbf{f}(t)$$

där

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som har begynnelsevärdena  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$ . Finns det en generaliserat stationär lösning? (0.5)

4. Låt  $S$  vara ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system med utsignalen  $y = S(w)$  definerad genom

$$y^{(3)}(t) - y''(t) + 2y(t) = 2 \int_0^t w(\tau) d\tau + w'(t) - 2w(t), t > 0.$$

Bestäm systemets överföringsfunktion, impulssvar och stegsvar. Är systemet stabilt?

5. Lös begynnelsevärdeproblemet

$$y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 2 \cos(t) + 9 \sin(t)$$

med  $y(0) = 0, y'(0) = 4$ .

6. a) Ge ett exempel på ett linjärt, tidsinvariant system  $S$  med överföringsfunktion  $H(s)$  sådant att  $H(ia)$  är definerat för något  $a \in \mathbb{R}$  men  $S(\cos(at)) \neq H(ia) \cos(at)$ .

(0.3)

b) Låt  $S$  vara ett linjärt, tidsinvariant system med en jämn överföringsfunktion  $H(s) = H(-s)$  definerat för  $-\alpha < \operatorname{Re}(s) < \alpha, \alpha > 0$ . Visa att  $S(\cos(at)) = H(ia) \cos(at)$  för  $0 \leq a < \alpha$ .

(0.3)

c) Funktionen  $f(t)$  har Fouriertransformen  $\frac{1 - i\omega}{1 + i\omega} \cdot \frac{\sin \omega}{\omega}$ . Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

(0.4)

*Lycka till!*