

**HJÄLPMEDEL:** Utdelat formelblad för System och transformier.  
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1) Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret  $e^{-|t|}$ .

a) Är systemet insignal-utsignalstabil? (0.3)

b) Vilken insignal ger upphov till utsignalen  $te^{-|t|}$ ? (0.4)

c) Bestäm systemets stegsvar. (0.3)

2) Bestäm en distributionslösning till differentialekvationen

$$ty''(t) + y'(t) = t\delta(t-2), t > 0,$$

sådan att  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 1$ .

3) Bestäm en distributionslösning till integralekvationen

$$y'(t) + 2y(t) + e^{-2t} \int_0^t y(\tau)e^{2\tau} d\tau = 10 \cdot \theta(t).$$

4. Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{f}(t)$$

där

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}$$

som har begynnelsevärdena  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ . Dela upp lösningen i transient och stationär del. (0.5)

b) Ersätt insignalerna  $\mathbf{f}(t) = (2 \cos(2t), \cos(2t))^T$  med  $\mathbf{f}(t) = (e^{-2t}, 3e^{-2t})^T$ . Finns det en generaliserat stationär lösning? (0.2)

c) Bestäm den allmänna lösningen till det modifierade systemet i b). (0.3)

5. a) Beräkna genom diagonalisering exponentialmatrisen  $e^{At}$  då

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (0.2)$$

b) Beräkna samma exponentialmatrisen med hjälp av Laplacetransformen. (0.4)

c) Låt  $A$  vara en reell symmetrisk  $n \times n$  matris. Visa att för varje  $t \in \mathbb{R}$  är matrisen  $e^{At}$  en positivt definit matris, dvs för alla  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  gäller

$$x^T e^{At} x > 0. \quad (0.4)$$

6) I ett linjärt, tidsinvariant system ges sambandet mellan insignalen  $w$  och utsignalen  $y$  av ekvationen

$$y(t) + \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-\tau} \theta(\tau) d\tau = w(t).$$

Kvoten

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt}$$

kan uppfattas som förhållandet mellan utsignalens och insignalens energi. Beräkna denna kvot om  $w(t) = \frac{\sin 2t}{t}$ .

*Lycka till!*