

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar.

1. a) Lös systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t. \quad (0.7)$$

b) Bestäm alla reella konstanter b så att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

inte är diagonaliserbar. (0.3)

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0.5)$$

b) Är detta system stabilt? Glöm inte att motivera ditt svar. (0.2)

c) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (2A^{100} + 3A^{200}) \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0.3)$$

3. a) Bestäm den kausala lösningen till differentialekvationen

$$y''' + 3y'' + 2y' = \delta(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (0.5)$$

V.g. vänd!

b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \theta(t - 1), & t > 0 \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1 \end{cases} \quad (0.5)$$

4. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 + 1, & \text{för } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Beräkna distributionsderivatan f' och alla primitiva distributioner av f . (0.6)

b) Antag att ett kausalt, linjärt och tidsinvariant system \mathcal{S} har stegsvaret $\mathcal{S}(\theta)(t) = f(t)$. Bestäm systemets impulssvar $h(t)$ och beräkna systemets svar på insignalen $t\theta(t)$. (0.4)

5. Ett kausalt, linjärt och tidsinvariant system \mathcal{S} har impulssvaret $h(t)$. Antag att $w(t)$ är en okänd kausal signal sådan att systemets svar blir

$$-3\theta(t)\sin t$$

på insignalen $w(t)$ och

$$9\theta(t)(-1 + \cos t)$$

på insignalen $w * w(t)$. Bestäm systemets impulssvar $h(t)$ och systemets svar på insignalen $w_1(t) = (t\theta(t))^2$.

6. a) Beräkna Fouriertransformen $\mathcal{F}(f)$ och den inversa Fouriertransformen $\mathcal{F}^{-1}(f)$ av funktionen

$$f(t) = t e^{-9t^2}. \quad (0.4)$$

b) Låt $g(t) = e^{-9t^2}$. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g * g * g(t))^2 dt. \quad (0.3)$$

c) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g * g * g(t) dt. \quad (0.3)$$

LYCKA TILL!