LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2018–04–11 kl 14 – 19

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad för System och transformer.
Lösningarna ska vara försedda med **ordentliga motiveringar**.

1. För ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system ges sambandet mellan insignal w och utsignal y av differentialekvationen

$$y''' + 2y'' + 2y' = w'' + 4w' + 4w\,.$$

Bestäm systemets överföringsfunktion, dess impulssvar och dipolsvar där dipol betyder $\delta'(t)$. Är systemet stabilt?

2. a) Beräkna exponentialmatrisen e^{tA} då $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. (0.4)

b) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. (0.3)

c) Avgör om det finns en matris B sådan att

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(0.3)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x''(t) = -y'(t) \\ y''(t) = x'(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x(0) = 0, & x'(0) = 1 \\ y(0) = 0, & y'(0) = 0 \end{cases}.$$

4. a) Låt f vara en jämn reell L^1 funktion. Visa att Fouriertransformen av f är reell. (0.2)

b) Beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = (1 - |t|)(\theta(t+1) - \theta(t-1)).$$

(0.4)

c) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2 + t^4}\,dt.$$

(0.4)

5. a) Beräkna med hjälp av definitionen den ensidiga Laplacetransformen av funktionen $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, t > 0$ och för naturliga n av $g(t) = \dfrac{t^n}{\sqrt{t}}, t > 0$. (0.5)

b) Bestäm en lösning till ekvationen

$$1 + t + t^2 = \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau, \qquad t > 0.$$

(0.5)

6. Låt $\Delta = [a, b]$ vara ett begränsat interval och f en kontinuerlig deriverbar funktion $f \colon \Delta \to \mathbb{R}$, dvs derivatorna är kontinuerliga i (a, b) och vänster- och höger-derivator existerar i respektive randpunkter. Vi säger att $f \in C^1(\Delta)$.

a) Låt $a = 0, b = 1$, dvs $\Delta = [0, 1]$. Finns det ett $f \in C^1([0, 1])$, inte identiskt med noll, och sådant att

$$\int_0^1 f(t) \cos(\lambda t)\, dt \geq 0$$

för alla $\lambda \in \mathbb{R}$? (0.4)

b) Visa att, om en funktion f uppfyller villkoren i a), så är $f(1) = 0$. (0.2)

c) Låt $a = 1, b = 2$, dvs $\Delta = [1, 2]$. Finns det ett $f \in C^1([1, 2])$ sådant att

$$\int_1^2 f(t) \cos(\lambda t)\, dt > 0$$

för alla $\lambda \in \mathbb{R}$? (0.4)