

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad för System och transformier.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Bestäm den allmänna lösningen till det tidsdiskreta systemet

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{bmatrix}$$

med

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}. \tag{0.5}$$

b) För vilka $(x_0, y_0)^T$ är lösningen begränsad? (0.2)

c) Bestäm en matris B sådan att $B^3 = A$. (0.3)

2. Lös följande integralekvation med hjälp av Laplacetransform

$$3 \int_0^t y(t) dt - ty(t) = t^2, \quad t > 0, \quad y(1) = 3.$$

3. Bestäm en distributionslösning till differentialekvationen

$$(e^t y')' = t^4 \cos^2(2\pi t) \cdot \delta(t - 1)$$

sådan att $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 1$.

4. a) Bestäm den stationära lösningen till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + 2 \cos(2t) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2 + \cos(2t). \end{cases} \tag{0.3}$$

b) Ange den lösning som har begynnelsevärdena $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Dela upp lösningen i transient och stationär del. (0.2)

c) Ersätt insignalerna $f(t) = (2 \cos(2t), \cos(2t))$ med $f(t) = (e^{-2t}, 3e^{-2t})$. Finns det en generaliserat stationär lösning? (0.2)

d) Bestäm den allmänna lösningen till det modifierade systemet i c). (0.3)

5. Med hjälp av Fourieiertransformen lös det kvantmekaniska egenvärdesproblemet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - g\delta(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad E < 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 dx = 1, \quad \psi(x) > 0.$$

Bestäm också E i termer av konstanter \hbar, g, m .

6. Låt $f(t) = \sin(|t|)$ (lägg märke till absolutbeloppet av t i argumentet).

a) Skriv f med hjälp av stegfunktioner. (0.2)

b) Kan f Laplacetransformeras? I så fall ange definitionsstrimlan. (0.3)

c) Utgå från Fouriertransformen $\mathcal{F}(\theta(t))(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$ och beräkna Fouriertransformen av f . (0.5)

Lycka till!