

**HJÄLPMEDEL:** Utdelat formelblad för System och transformier.  
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1) Låt

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{3} (e^{5t}(x_0 + y_0) + e^{-t}(2x_0 - y_0)) \\y(t) &= \frac{1}{3} (2e^{5t}(x_0 + y_0) + e^{-t}(y_0 - 2x_0))\end{aligned}$$

vara den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm matrisen  $A$ . (0.5)

b) Ange den allmänna lösningen till differensekvationen

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (0.5)$$

2. a) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

med hjälp av **Laplacetransformen**. (0.8)

b) För vilka komplexa tal  $s$  finns en generaliserad stationär lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot e^{st}. \quad (0.2)$$

3. Sätt  $f(t) = \sin t \cdot \theta(t + \pi/6)$ .

a) Bestäm  $f'(t)$  och rita dess graf. (0.3)

b) Bestäm den primitiva funktion  $F(t)$  till  $f(t)$  som uppfyller  $F(0) = 1$ . (0.4)

c) Beräkna faltningen  $(f' - \cos t \cdot \theta(t + \pi/6)) * f(t)$ . (0.3)

4. Undersök följande insignal-utsignal-relationer med avseende på linearitet, tidsinvarians och kausalitet:

$$y(t) = Sw(t) =$$

$$a) w(t - 5), \quad b) w'(t) \cdot w''(t), \quad c) w(t + 1) \cdot \cos(t).$$

Bara svar krävs. Fyra rätta svar (av sammanlagt nio) ger inga poäng, därefter ger varje rätt svar 0.2 poäng.

5. a) För  $a > 0$  beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = \begin{cases} 2a - |t| & |t| < 2a \\ 0 & |t| > 2a \end{cases}. \quad (0.5)$$

b) Beräkna för  $a > 0$  integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4} dx. \quad (0.5)$$

6a) Låt  $f(t)$  vara en testfunktion, dvs  $f \in C^\infty$  med kompakt stöd. För  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  hitta en lösning  $y_n(t)$  till ekvationen

$$\frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t-\tau|} y_n(t) dt = f(t). \quad (0.7)$$

b) Vad är punktvisa gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$ ? Konvergerar funktionsföljden  $y_n(t)$  likformigt på  $\mathbb{R}$ ? (0.3)

*Lycka till!*