

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar.

1. Sätt $f(t) = (2t + 1)\theta(t)$.

a) Beräkna $f''(t)$ i distributionsmening. (0.4)

b) Bestäm den primitiva distribution $F(t)$ till $f(t)$ som uppfyller $F(1) = 3$. (0.3)

c) Beräkna andraderivatans $(F' * f)'$ i distributionsmening. (0.3)

2. Bestäm en begränsad lösning till differentialekvationen

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = \delta'(t) + 5\delta(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

3. a) Beräkna exponentialmatrisen e^{tA} för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

b) Lös systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

4. a) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0.5)$$

b) Lös det tidsdiskreta systemet

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (0.5)$$

5. a) Beräkna Fouriertransformen $\mathcal{F}(f)$ och den inversa Fouriertransformen $\mathcal{F}^{-1}(f)$ av funktionen

$$f(t) = t e^{-2|t|}. \quad (0.3)$$

- b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} \sin(at)}{t} dt. \quad (0.7)$$

6. a) Ett linjärt, tidsinvariant och kausalt system \mathcal{S}_1 har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 1}.$$

Bestäm systemets impulssvar $h(t)$. (0.3)

- b) Bestäm systemets impulssvar $h(t)$ för systemet \mathcal{S}_2 med överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{e^{s^2}}{1 - e^{-s}}, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 1. \quad (0.7)$$