LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
SYSTEM OCH TRANSFORMER
2017–04–20 kl 8 – 13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad för System och transformer.
Lösningarna ska vara försedda med **ordentliga motiveringar**.

1. Funktionen

$$f(t) = t\theta(t) + \left(\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\right)\theta(t-1) + (t-2)\theta(t-2)$$

är given.

a) Beräkna andraderivatan $f''(t)$ i distributionsmening. (0.5)

b) Rita andraderivatan $f''(t)$ i intervallet $0 \le t \le 5$. (0.3)

c) Ange alla punkter där funktionen är deriverbar i vanlig mening. (0.2)

2. Finn impulssvaret och stegsvaret till det kausala tidsinvarianta systemet

$$y'' + 3y' + 2y = 3w' + 2w.$$

Bestäm också utsignal till insignalen $w(t) = e^t\theta(t)$.

3. a) Ge om möjligt exempel på (2×2)-matriser A, B, C, D så att

i) A är diagonaliserbar och inverterbar,

ii) B är diagonaliserbar men inte inverterbar,

iii) C är inte diagonaliserbar men inverterbar,

iv) D är inte diagonaliserbar och inte inverterbar. (0.4)

b) För vilka reella tal s finns en generaliserad stationär lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + e^{st} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ ? \qquad (0.2)$$

c) För vilka reella tal a, b, c, d är systemet

$$\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x + w \\ y = x \end{cases}$$

insignal/utsignal stabilt? (0.4)

4. Bestäm en lösning till integralekvationen

$$2\int_0^t e^{s-t}y(s)\,ds - ty(t) = 0, \qquad t > 0 \text{ och } y(1) = 1.$$

5. Låt

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t+T_0}{T_0} & -T_0 \le t \le 0 \\[2ex] \dfrac{-t+T_0}{T_0} & 0 \le t \le T_0 \\[2ex] 0 & |t| > T_0 \end{cases}.$$

Beräkna fouriertransformen F av f. Beräkna också energin $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$.

6. Funktionsföljden $g_n(t)$ är bestämd av formeln

$$g_0(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \qquad g_n(t) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2} \qquad t \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots.$$

a) Visa att

$$g_{n+1}(t) = tg_n(t) - g_n'(t)$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$. (0.2)

b) Uttnytta a) för att visa att $g_n(t)$ är egenfunktioner till fouriertransformationen, dvs

$$\mathcal{F}(g_n)(t) = \lambda_n g_n(t), \qquad \lambda_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Bestäm också λ_n. (0.8)

Lycka till!