Lösningar till tentamen i linjär algebra 20190601

1. Determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

är lika med $(k-1)(k-2)$ som har nollställen i $k = 1, 2$. En enkel räkning visar att $k = 1$ ger oändligt många lösningar. Lösningarna för $k = 1$ är$(x, y, z) = (-1, 4-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Löser vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y & = 1 \\ x + z & = 2 \\ y - z & = -1 \end{cases}$$

så fås linjen $(x, y, z) = t(-1, 1, 1) + (2, -1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
Avståndet till origo fås genom att ta en punkt på linjen, t.ex. $(2, -1, 0)$, och bilda vektorn

$$(2, -1, 0) - \frac{(2, -1, 0) \cdot (-1, 1, 1)}{\|(-1, 1, 1)\|^2}(-1, 1, 1) = (1, 0, 1).$$

Avståndet blir sålunda $\|(1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$.

3. Determinanten av båda matriserna A och B är lika med 0 och därmed är raderna i varje matris linjärt beroende. Vidare blir matrisekvationen (med I som identitetsmatrisen)

$$(A - I)X = B.$$

Här kan vi se att $A - I$ är inverterbar och lösningen blir

$$X = (A-I)^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Genom Gausselimination finner vi att A är radekvivalent (Gaussekvivalent) med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att rangen är 2 och nollrummet fås genom att sätta $x_4 = t, x_3 = s$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(5, -3, 0, 1) + s(1, -1, 1, 0).$$

En bas för nollrummet är alltså $\{(5, -3, 0, 1), (1, -1, 1, 0)\}$.

5. Vi undersöker determinanten

$$det(A - \lambda I) = \ldots = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3),$$

och finner att den har nollställen i $\lambda = 0, -1, 3$, som är matrisens egenvärden. Låt oss sätta $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$. Motsvarande egenvektorer är då

$$\overline{u}_1 = (-1, 1, 1)t, \quad \overline{u}_2 = (2, 1, 1)t, \quad \overline{u}_3 = (0, -1, 1)t, \tag{0.1}$$

6. Avbildningsmatriserna för T_1 fås t.ex. genom att konstatera att en spegling i planet $x = z$ byter plats på x och z-koordinaterna och behåller y koordinaten. Sålunda blir

$$[T_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En vridning kring z-axeln i positiv led behåller z-koordinaten, och eftersom vridningen därmed sker i x, y-planet kan man använda standardmatrisen för detta och konstatera att

$$[T_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man se vart varje standardbasvektor $\overline{e}_i$ avbildas och låta kolonnerna vara $T(\overline{e}_i)$. Standardmatrisen för den sammansatta avbildningen är sålunda

$$[T_2][T_1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Eftersom $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ är parvis ortogonala gäller att $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{u} \cdot \overline{w} = \overline{v} \cdot \overline{w} = 0$. Vi får då

$$\|\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}\|^2 = (\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) \cdot (\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{u} + \overline{v} \cdot \overline{v} + \overline{w} \cdot \overline{w} = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 + \|\overline{w}\|^2,$$

vilket visar a-uppgiften.
Om alla tre vektorerna har samma längs så gäller att $\|\overline{u}\| = \|\overline{v}\| = \|\overline{w}\|$ och därmed är det sant att

$$\overline{u} \cdot (\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}) = \overline{v} \cdot (\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}) = \overline{w} \cdot (\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}).$$

Eftersom

$$\overline{u} \cdot (\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}) = \|\overline{u}\| \|\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}\| \cos \theta_u,$$

där θ_u är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$ så måste denna vinkel vara samma för alla tre vektorerna.
8. Avbildningen är en projektion på planet med normalvektor parallell med $\overline{r}$. För att se detta kan man änvända formeln i ledningen och får då

$$\overline{r} \times (\overline{x} \times \overline{r}) = \|\overline{r}\|^2 \overline{x} - (\overline{r} \cdot \overline{x}) \overline{r} = \overline{x} - (\overline{r} \cdot \overline{x}) \overline{r},$$

som är just projektionen på det plan som har normalvektor $\overline{r}$. Skriver man T:s avbildningsmatris i basen bestående av vektorn $\overline{r}$ och två vektorer i planet (som är icke-parallella) så får den utseendet

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. En bas för värdemängden kan man få genom att titta på de kolonner i A som har pivotelement efter Gausseliminationen (see uppg. 4). Alltså är $\{(1, 2, 4), (2, 3, 7)\}$ en bas för kolonnrummet, dvs. en bas för värdemängden.
För att hitta en bas för $N(T)^\perp$ söker vi först de vektorer som är ortogonala mot $(5, -3, 0, 1), (1, -1, 1, 0)$. Detta är ekvivalent med att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Lösningen är $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-1/2, -1/2, 0, 1) + s(3/2, 5/2, 1, 0)$, $t, s \in \mathbb{R}$. En bas är således $\{(-1, -1, 0, 2), (3, 5, 2, 0)\}$.
För att visa att varje $\overline{x}$ kan skrivas som $\overline{x} = \overline{u} + \overline{v}$ på ett unikt sätt där $\overline{u} \in N(T)^\perp$ och $\overline{v} \in N(T)$, så räcker det att visa att vektorerna $\overline{u}_1 = (-1, -1, 0, 2), \overline{u}_2 = (3, 5, 2, 0), \overline{v}_1 = (5, -3, 0, 1), \overline{v}_2 = (1, -1, 1, 0)$ är linjärt oberoende. Men detta följer tämligen direkt; eftersom vektorerna $\overline{u}_1$ och $\overline{u}_2$ båda är ortogonala mot både $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_2$ så är också samtliga linjärkombinationer $a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2$, $a, b \in \mathbb{R}$, också ortogonala mot samtliga linjärkombinationer $c\overline{v}_1 + d\overline{v}_2$, $c, d \in \mathbb{R}$. Två ortogonala vektorer kan uppenbarligen inte vara lika (såvida de inte är nollvektorerna) och således har ekvationen

$$a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2 = c\overline{v}_1 + d\overline{v}_2$$

endast lösningen $a = b = c = d = 0$. Detta visar att vektorerna är linjärt oberoende. Huvudsatsen ger nu att varje $\overline{x}$ kan skrivas just på ett unikt sätt som angett ovan.

10. Antag att $A^T A\overline{x} = \overline{0}$. Då följer det av ledningen att

$$0 = \overline{x}^T A^T A\overline{x} = (A\overline{x})^T (A\overline{x}) = \|A\overline{x}\|^2.$$

Men detta är ekvivalent med att $A\overline{x} = 0$, som endast har lösningen $\overline{x} = \overline{0}$ om och endast om A har full rang. Slutsatsen blir nu att $A^T A\overline{x} = \overline{0}$ endast har lösningen $\overline{x} = \overline{0}$ om och endast om A har full rang. Huvudsatsen (9.9) ger nu att $A^T A$ måste vara inverterbar om och endast om A har full rang.