LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR TILL
Linjär algebra
2019 – 05 – 04, kl. 8 – 13

1. Det finns en entydig lösning $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ då $a \neq 0$och $a \neq -4$..
Lösningarna är $(x, y, z) = t\,(-1, 0, 1)$ då $a = 0$.
Lösningarna är $(x, y, z) = t\,(7, -1, 1)$ då $a = -4$.

2. Rang(A)=2 och nolldim(A)=2. En bas för nollrummet är $(-1, 1, 0, 0)$ och $(-2, 0, 3, 7)$.

3. a)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Matrisekvationen $\lambda X + AX = B$ är lösbar då $\lambda \neq 1$.

4. Egenvektorer

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

med egenvärdet $\lambda_1 = 1$, och egenvektorer

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

med egenvärdet $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.
Matrisen A är inte diagonaliserbar.

5. a) Vinkeln mellan planen $4x + y + z = 1$ och $2x + 2y - z = 2$ är $\frac{\pi}{4}$.
b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$, vilket medför att $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är ortogonala.

6. Många möjligheter. Man kan, till exempel, välja $\mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ och $\mathbf{v_3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, -1, 1)$.
Koordinaten under basen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ för $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$ blir $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-7}{3\sqrt{2}}\right)$.

7. Avståndent från punkten P till sträckan L är $2\sqrt{74}$.

8. Avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ är

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen för $\mathbf{G}$ är

$$A_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9 a) Antag att $\lambda_1 A^{50}\mathbf{u} + \lambda_2 A^{50}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Så gäller $A^{50}\left(\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}\right) = \mathbf{0}$, vilket medför att $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ty matrisen A^{50} är inverterbar. Men **u** och **v** är linjärt oberoende. Så är $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

b) Egenvektorer är

$$t5^{50}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0,$$

och

$$t(-1)^{50}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

10 a)

$$G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} - A^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \left(I - A^2\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

vilket medför att G är linjär med avbildningsmatrisen $I - A^2$.

b) $(I - A^2)(I + A^2) = I - A^4 = I$. Så är matrisen $I - A^2$ inverterbar och alltså avbildningen G är inverterbar.