LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2018–10–29

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Använd t.ex. Gauß-elimination eller adjunkt.

2. Svar: (a), (b) och (e) är sanna. (c) och (d) är falska.

3. Svar: Linjen skär planet. Vinkeln är $\frac{\pi}{3}$.

   Låt $\boldsymbol{n} = (1, 2, 1)$ och $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)$. Då är $\boldsymbol{n}$ normal till planet och $\boldsymbol{v}$ är parallell med linjen. Eftersom $\boldsymbol{v}$ ej är ortogonal mot $\boldsymbol{n}$ skär linjen planet. Beräkning av $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}$ på två sätt ger att $3 = \sqrt{6}\sqrt{2}\cos\theta$ där θ är vinkeln mellan de två vektorerna. Alltså är $\theta = \frac{\pi}{6}$ och sålunda är vinkeln mellan planet och linjen $\frac{\pi}{3}$.

4. Svar: Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Då diagonaliseras A t.ex. av $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, det vill säga $A = SDS^{-1}$.

   Vi har att $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Alltså är 1 och 2 egenvärdena till A. Beräkning ger att $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet 1, och att $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet 2. Slutsatsen följer.

5. Svar: T.ex. är $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3 = (0, 0, -1)$ en sådan bas. Koordinaterna för $(1, 1, 1)$ i den nya basen är $(\sqrt{2}, 0, -1)$.

   Tag t.ex. $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ och välj $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ parallell med $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times (1, 1, 1)$ och med längd 1, t.ex. $\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Tag nu $\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = (0, 0, -1)$.

   Man ser att $(1, 1, 1) = \sqrt{2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_3$. Alternativt kan koordinaterna för $(1, 1, 1)$ beräknas med hjälp av basbytesmatrisen $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

6. Vi har att $A^2 = \frac{NN^TNN^T}{N^TNN^TN} = A = \frac{N(N^TN)N^T}{(N^TN)(N^TN)} = \frac{NN^T}{N^TN} = A$ samt att $A^T = \frac{(NN^T)^T}{N^TN} = \frac{(N^T)^TN^T}{N^TN} = \frac{NN^T}{N^TN} = A$.

   Skriv $X = X_1 + X_2$ med X_1 parallell med N och X_2 ortogonal mot N. Då är $X_1 = \lambda N$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$ och $N^TX_2 = 0$. Vi får nu att

   $$A\,X = AX_1 + AX_2 = \frac{NN^T\lambda N}{N^TN} + \frac{NN^TX_2}{N^TN} = \lambda\frac{N(N^TN)}{N^TN} + 0 = \lambda N = X_1,$$

   det vill säga $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$.

7. Svar: Volymen är $\frac{1}{3}$.

   Rita en figur. Planet π_1 går genom punkterna $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Planet π_2 går genom punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Planet π_3 går genom punkterna $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Planet π_4 går genom punkterna $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 1)$.

Vi ser att tetraedern har hörn i punkterna $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 2)$. Bilda t.ex. vektorerna

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (2,0,0) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(3,-1,-1),\\
\boldsymbol{v}_2 &= (0,2,0) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(-1,3,-1),\\
\boldsymbol{v}_3 &= (0,0,2) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(-1,-1,3).
\end{aligned}$$

Låt A vara den matris som har $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ som kolonnvektorer (eller radvektorer). Vi beräknar att $\det \mathsf{A} = 2$. Tetraederns volym ges av $\frac{1}{6}|\det \mathsf{A}| = \frac{1}{3}$.

8. Eftersom P är symmetrisk, är P diagonaliserbar och $\mathsf{P} = \mathsf{S}\,\mathsf{D}\,\mathsf{S}^{-1}$. Antag att X är en egenvektor med egenvärde λ. Då är $\lambda \mathsf{X} = \mathsf{P}\mathsf{X} = \mathsf{P}^2\mathsf{X} = \lambda^2\mathsf{X}$. Alltså är $\lambda = \lambda^2$ och $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

   Om alla egenvärden är 0 är $\mathsf{P} = \mathsf{0}$, och om alla egenvärden är 1 är $\mathsf{P} = \mathsf{I}$.

   Antag att både 0 och 1 är egenvärden, att X_0 är en egenvektor med egenvärde 0 och att X_1 är en egenvektor med egenvärde 1. Då är X_0 och X_1 ortogonala, ty

$$\mathsf{X}_0^T\mathsf{X}_1 = \mathsf{X}_0^T\mathsf{P}\,\mathsf{X}_1 = \mathsf{X}_0^T\mathsf{P}^T\ \mathsf{X}_1 = (\mathsf{P}\mathsf{X}_0)^T\mathsf{X}_1 = \mathsf{0}^T\mathsf{X}_1 = 0.$$

   Detta medför att S kan väljas ortogonal. Två fall uppkommer. Om D har två ettor i diagonalen är avbildningen en projektion på ett plan. Om D har precis en etta i diagonalen är avbildningen en projektion på en linje. Eftersom S är ortogonal är projektionerna i båda fallen ortogonala projektioner. (Nollrummet är ortogonalt mot värdemängden/kolonnrummet.)

9. Svar: Arean är $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

   De tre linjerna genom punkten $(2, 2, 2)$ och linjens tre hörnpunkter ges av

$$\begin{aligned}
\ell_1 &: (x,y,z) = (2,2,2) + t(0,1,1),\\
\ell_2 &: (x,y,z) = (2,2,2) + t(1,1,1),\\
\ell_3 &: (x,y,z) = (2,2,2) + t(1,1,0),
\end{aligned}$$

   där $t \in \mathbb{R}$. Linjen ℓ_1 skär planet $x + y + z = 0$ i punkten $(2, -1, -1)$. Linjen ℓ_2 skär planet $x + y + z = 0$ i punkten $(0, 0, 0)$. Linjen ℓ_3 skär planet $x + y + z = 0$ i punkten $(-1, -1, 2)$.

   Skuggan är en triangel med hörn i $(2, -1, -1)$, $(0, 0, 0)$ och $(-1, -1, 2)$. Låt $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, -1) - (0, 0, 0)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (-1, -1, 2) - (0, 0, 0)$. Då ges trianglens area av $\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_3|$, där $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$. Beräkning ger att $\boldsymbol{v}_3 = -3(1, 1, 1)$ och arean är därför $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

10. Svar: $(\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \mathsf{I} + \mathsf{A} + \cdots + \mathsf{A}^{n-1}$.

    Låt $\mathsf{B} = \mathsf{I} + \mathsf{A} + \cdots + \mathsf{A}^{n-1}$. Då är

$$(\mathsf{I} - \mathsf{A})\mathsf{B} = \mathsf{B} - \mathsf{A}\mathsf{B} = (\mathsf{I} + \mathsf{A} + \cdots + \mathsf{A}^{n-1}) - (\mathsf{A} + \mathsf{A}^2 + \cdots + \mathsf{A}^n) = \mathsf{I} - \mathsf{A}^n = \mathsf{I}.$$

    Detta visar att A är inverterbar och att B är inversen till A.