LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2018-08-29 kl 8–13

1. Volymen med tecken ges av determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2a & 1 \end{vmatrix} = 4(a-2)(1-a).$$

Parallellepipedens volym blir alltså $4|(a-2)(1-a)|$.
Det homogena systement har bara den triviala lösningen $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ då determinanten ovan inte är 0, d.v.s. då $a \neq 1$ och $a \neq 2$.
Om $a = 1$ får vi systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & -x_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

vilket har lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 1, 0)$.
Om $a = 2$ får vi systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & -6x_2 & & & = & 0 \\ & & -4x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

vilket har lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 1)$.

2. a) En riktnings vektor till linjen l_1 ges av

$$\bar{\mathbf{v}} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = (2,-1) - (-1,2) = (3,-3).$$

Linjen l_1 kan alltså skrivas $(x,y) = (-1,2) + t(3,-3)$.
En vektor som går mellan l_1 och P är $\overline{P_1P} = (1,3) - (-1,2) = (2,1)$.
Projektionen på linjen ges alltså av

$$\overline{OP_1} + \frac{\overline{P_1P} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{v}} = (-1,2) + \frac{(2,1)\cdot(3,-3)}{3^2+3^2}(3,-3) = \frac{1}{2}(-1,3).$$

Kortaste avståndet blir samma som avståndet mellan P och dess projektion som ges av

$$|(1,3) - \frac{1}{2}(-1,3)| = \frac{1}{2}|(3,3)| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

b) Linjen l_2 kan skrivas $(x,y,z) = (4,5,2) + t(2,-2,4)$. Skärningen mellan π och l_2 ges av

$$(4+2t) + 3(5-2t) - 2(2+4t) = 3 \Leftrightarrow t = 1.$$

Skärningspunkten blir alltså $(4,5,2) + (2,-2,4) = (6,3,6)$.

3. De två vektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är inte parallella och utgör därför en bas för planet.
Sambandet mellan koordnaterna i nya och gamla basen ges av $X = S\hat{X}$, där S är basbytesmatrisen

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vektorn $(1, 1)$ i koordinatsystemet $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ blir alltså

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i basen $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$.
Vektorn $(1, 1)$ i koordinatsystemet $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ blir

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

i basen $\bar{\mathbf{e}}_1$,$\bar{\mathbf{e}}_2$.

4. a) Vi har att

$$(XA^{-1} - B)C = I \Leftrightarrow XA^{-1} - B = C^{-1} \Leftrightarrow X = (C^{-1} + B)A.$$

Vi får alltså

$$X = \left(\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Eftersom systemet inte har entydig lösning måste $\det(M) = 0$, alltså är (ii) falsk.
Enligt huvudsatsen har $MX = Z$ bara lösning för alla Z om och endast om $\det(M) \neq 0$, alltså är (i) sann.
Eftersom samtliga lösningar till $MX = Y$ kan skrivas som $X = X_p + X_h$ där X_h ligger i nollrummet till M ser att vektorerna $(3, 1, 0, 0)$ och $(1, 2, 3, 1)$ är en bas för nollrummet. Nolldimensionen är då 2 och enligt dimensionssatsen är rangen 4-2 = 2, alltså är (iii) sann.
Vektorn $\bar{\mathbf{v}} = (-2, 1, 3, 1)$ är en egenvektor med egenvärde noll om den ligger i nollrummet till M. Eftersom $(-2, 1, 3, 1) = -(3, 1, 0, 0) + (1, 2, 3, 1)$ är (iv) sann.
Det karakteristiska polynomet $p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M)$ är noll då λ är ett egenvärde. Alltså är (v) sann.

5. a) Egenvärdena uppfyller karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\left((\lambda-1)^2 - 9\right),$$

vilken har lösningarna $\lambda = -2$ (dubbelrot) och $\lambda = 4$.
För $\lambda = -2$ får vi systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrl} -x_2 & - & x_3 & = 0 \\ -3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ 3x_2 & - & 3x_3 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} -x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & 6x_3 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right. .$$

Alltså blir egenvektorerna $(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, 0),\ t \neq 0$.
För $\lambda = 4$ får vi systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 6x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} 6x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. .$$

Alltså blir egenvektorerna $(x_1, x_2, x_3) = (0, -t, t),\ t \neq 0$.
Eftersom vi bara kan hitta två linjärt oberoende egenvektorer kan matrisen inte diagonaliseras.

b) Vi ser att avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildningen $F \circ F$ som avbildar K_0 på K_2 är A^2. Avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildningen $F \circ F \circ F$ som avbildar K_0 på K_3 är A^3. På samma sätt blir A^n avbildningsmatrisen till den avbildning som avbildar K_0 på K_n. Volymen av K_n (med tecken) kan alltså skrivas

$$V(K_n) = \det(A^n) V(K_0).$$

Utveckling efter andra raden ger

$$V(K_0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2.$$

P.g.a. produktregeln är

$$\det(A^n) = (\det(A))^n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}^n = (-2(1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-3)))^n = 16^n.$$

Vi får alltså volymen

$$|V(K_n)| = 16^n \cdot |-2| = (2^4)^n 2 = 2^{4n+1}.$$

Eftersom determinanten $\det(A^n) = (\det(A))^n$ inte är noll är A^n inverterbar för alla n.

6. a) Gausselimination ger $AX = B \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & 5x_2 & - & 5x_3 & = & -3 \\ & & & & 0 & = & -\frac{5}{2} \\ & & & & 0 & = & -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Systemet är alltså inte lösbart. Eftersom finns 2 pivot element och 3 kolonner blir rangen 2 och nolldimensionen 3-2 = 1.

b) Vi har

$$V_1 \cdot V_2 = \tfrac{1}{9}(1\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 2) = 0,$$
$$|V_l| = \tfrac{1}{3}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2} = 1,$$
$$|V_2| = \tfrac{1}{3}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2} = 1.$$

Alltså är V_1 och V_2 ortonormerade. Dom två första kolonnerna i A är en bas för kolonnrummet (eftersom pivot elementen finns i kolonn ett och två). Eftersom

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot V_1 \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3V_1 + 3V_2,$$

blir V_1 och V_2 också en bas för kolonnrummet.
Vektorn B_1 ligger i kolonnrummet och kan därför skrivas $B_1 = aV_1 + bV_2$.
Tar vi skalärprodukten mellan B och basvektorn V_1 får vi

$$V_1^T B = V_1^T B_1 + V_1^T B_2 = V_1^T B_1 = aV_1^T V_1 + bV_1^T V_2^T = a|V_1|^2 = a,$$

eftersom $V_1 \perp B_2$, $V_1 \perp V_2$ och $|V_1| = 1$, vilket ger $a = \frac{1}{3}(1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 0 + 0\cdot(-3)) = 3$. På samma sätt får vi $b = V_1^T B = \frac{1}{3}((-2)\cdot 3 + 1\cdot 3 + 0\cdot 0 + 2\cdot(-3)) = -3$, vilket ger

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B_2 = B - B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Eftersom Y tillhör kolonnrummet till A så är $Y \perp B_2$. Då blir

$$|Y + B_2|^2 = (Y + B_2)^T(Y + B_2) = Y^T Y + \underbrace{2Y^T B_2}_{=0} + B_2^T B_2 = |Y|^2 + |B_2|^2.$$

Eftersom AX är en linjärkombination av kolonnerna i A och B_1 ligger i kolonnrummet till A så ligger även $AX - B_1$ i kolonnrummet för alla X. Vi får då att

$$|AX - B|^2 = |AX - B_1 - B_2|^2 = |AX - B_1|^2 + |B_2|^2.$$

Då B_1 ligger i kolonnrummet till A kan vi hitta ett X så att $AX + B_1 = 0$. Eftersom $|AX - B_1| \geq 0$ för alla X får vi att minsta värdet av $|AX - B|^2 = |B_2|^2 = 0^2 + 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9$.