LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2018-06-01 kl 8-13

1. a) Vi projicerar först på normalen $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$

$$\mathbf{u_n} = \frac{(1,0,1)\cdot(1,-1,2)}{1^2+(-1)^2+2^2}(1,-1,2) = \frac{1}{2}(1,-1,2)$$

och sedan tar skillnaden

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u_n} = \frac{1}{2}(1,1,0).$$

Vinkeln α mellan $(1,0,1)$ och $(1,1,0)$ bestäms från

$$\cos\alpha = \frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

b) Vi sätter in först $(x,y,z) = t\mathbf{u} = (t,0,t)$ i planets ekvation för att bestämma P

$$1\cdot t - 1\cdot 0 + 2\cdot t = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad P\colon (1,0,1).$$

Den sökta linjens riktningsvektor $\mathbf{v}$ skall vara parallell med planet och vinkelrät mot $\mathbf{u}$, dvs skall vara vinkelrät mot båda: normalen $\mathbf{n}$ och $\mathbf{u}$. Exempelvis kan man ta $\mathbf{v} = \mathbf{n}\times\mathbf{u} = (1,-1,2)\times(1,0,1) = (-1,1,1)$. Linjens ekvation blir då

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t(-1,1,1) = (1-t, t, 1+t).$$

2. a) Se boken, avsnittet 9.6, Sats 9.

b) Enligt huvudsatsen är systemet lösbart för alla högerled om och endast om $\det A \neq 0$. I vårt fall skall vi lösa $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2a = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 3.$$

Sätt in $a = 3$ och Gausseliminera systemet $Ax = y$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& y_1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &=& y_2, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &=& y_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& y_1, \\ x_2 - x_3 &=& y_2 - y_1, \\ 2x_2 - 2x_3 &=& y_3 - y_1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& y_1, \\ x_2 - x_3 &=& y_2 - y_1, \\ 0 &=& y_1 - 2y_2 + y_3. \end{array}\right.$$

Här ser vi att systemet är lösbart om och endast om y ligger i planet

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 0.$$

3. a) Vi bestämmer inversen m.h.a. Gausseliminering $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

b) Lös $AX + A = BA \Leftrightarrow AX = BA - A \Leftrightarrow X = A^{-1}BA - I$ och beräkna

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Avbildningsmatrisen X för G uppfyller ekvationen $XA = B$, således

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. a) Egenvärdena till B är lösningar till $\det(\lambda I - B) = 0$:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Lösningar är $\lambda = \pm 1$. Nu bestämmer vi egenvektorer
$\underline{\lambda = -1}$:

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 & = 0, \\ -2x_2 & = 0, \\ -x_1 - x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = t, \\ x_2 & = 0, \\ x_3 & = -t \end{cases} \Leftrightarrow x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (x \neq 0).$$

$\underline{\lambda = 1}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = 0, \\ 0 & = 0, \\ -x_1 + x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = t, \\ x_2 & = s, \\ x_3 & = t \end{cases} \Leftrightarrow x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x \neq 0).$$

Det finns tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer, alltså kan matrisen diagonaliseras: $S^{-1}BS = D$ där S består av egenvektorer och D av egenvärden i samma ordning

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Enligt huvudsatsen utgör kolonnerna i A en bas om $\det A \neq 0$. Vi testar

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 - 2 - 1 - 2 = 1 \neq 0. \quad \text{Ja!}$$

Linjen $x = y = z$ kan omskrivas på parametersform som $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$. Vi bestämmer nya koordinater $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ för riktningsvektor $(1, 1, 1)$ från sambandet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\text{från 3a)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Det kunde vi faktiskt säga utan att veta vad A^{-1} var eftersom $(1, 1, 1)$ är precis den sista kolonnen i A och $A^{-1}A = I$.)
Således, den nya ekvationen för linjen är $(x, y, z) = (0, 0, t)$, dvs linjen är z-axeln i de nya koordinaterna (som är också lätt att inse från början utan räkningar, och med korrekt motivering godkännas det som ett rätt svar).

5. Räknelagar för vektorprodukt ger att

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{w} \times \mathbf{u}_1 + \mathbf{w} \times \mathbf{u}_2 = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2), \\ F(\lambda \mathbf{u}) &= \mathbf{w} \times (\lambda \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \lambda F(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

vilket bevisar att F är en linjär avbildning enligt definitionen.
Nollrummet är alla $\mathbf{u}$ som uppfyller $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = 0$. Vektorprodukt är noll om och endast om $\mathbf{u} \| \mathbf{w}$, dvs nollrummet är linjen $\mathbf{u} = t\mathbf{w}$, $t \in \mathbb{R}$.
Nolldimensionen är alltså 1, och rangen är $3 - 1 = 2$ (från dimensionssatsen).
Eftersom $\mathbf{w} \times \mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ skall värdemängden vara vinkelrät mot $\mathbf{w}$, dvs ligga i planet genom origo med normalvektorn $\mathbf{w}$. Dessutom $\operatorname{rang} F = 2$ garanterar att värdemängden är *hela* planet.
Alternativ lösning: skaffa avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

och beräkna nollrummet $(x_1, x_2, x_3) = t(2, 1, 2)$ som lösningar till $Ax = 0$ och kolonnrummet $2y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$ som alla y vilka uppfyller $Ax = y$ för någon x.

6. Beteckna

$$P_1 \colon (3, 3, 0), \quad P_2 \colon (3, 0, 3), \quad P_3 \colon (-1, 1, 4).$$

Eftersom $P_1 \mapsto P_2$ och $P_2 \mapsto P_3$ ligger alla tre punkter i samma rotationsplan, och rotationsaxeln ℓ är parallell med planets normal som är t.ex.

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = (-6, -12, -6) = -6(1, 2, 2).$$

Således, kan vi välja $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ som en riktningsvektor för ℓ

$$\ell\colon\ (x, y, z) = t(1, 2, 2).$$

För att bestämma rotationsvinkeln skall vi projicera vektorerna $\mathbf{u} = \overline{OP_1}$ och $\mathbf{v} = \overline{OP_2}$ på rotationsplanet $x + 2y + 2z = 0$ och mätar vinkeln mellan dessa. Projektionerna $\mathbf{u}'$ och $\mathbf{v}'$ ges av t.ex. projektionsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = (2, 1, -2), \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = (2, -2, 1). \end{aligned}$$

Eftersom

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}', \mathbf{v}'}) = \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{u}'||\mathbf{v}'|} = 0$$

är rotationsvinkeln 90°. Till sist, för att bestämma orientering (positivt eller negativt) beräknar vi

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = (-3, -6, -6) = -3\mathbf{n},$$

dvs $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{n})$ är negativt orienterade. Det betyder att rotationen skär medurs sett från spetsen av $\mathbf{n}$.