LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2017-08-24 kl 14–19

1. a) Triangelns sidor ges av vektorerna $\bar{\mathbf{v}}_1 = OP_2 - OP_1 = (0,1,2)$ och $\bar{\mathbf{v}}_2 = OP_3 - OP_1 = (2,0,4)$ som även blir riktningsvektorer till planet. En normal till planet får vi genom

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{v}}_1 \times \bar{\mathbf{v}}_2 = (4,4,-2).$$

Eftersom P_1 ligger i planet får vi

$$4 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 6.$$

Planets ekvation blir alltså

$$4x + 4y - 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - z + 3 = 0.$$

Triangelns area får vi genom

$$\frac{|v_1 \times v_2|}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}}{2} = 3.$$

b) Linjerna har skärning om ekvationsystemet

$$\begin{cases} -1 + 3t = 4 + 2s \\ 5 - t = -6 + 4s \\ -1 + t = 4 - s \end{cases}$$

har lösning. Gausselimination ger lösningen $(t,s) = (3,2)$ vilket ger skärningspunkten

$$\begin{cases} x = -1 + 3 \cdot 3 = 8 \\ y = 5 - 3 = 2 \\ z = -1 + 3 = 2 \end{cases}.$$

2. Ekvationssystemet har entydig lösning om

$$0 \neq \begin{vmatrix} a & 0 & -2 \\ 4 & 3-a & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(a^2 - 3a + 2) = -2(a-1)(a-2).$$

Enl. huvudsatsen har vi entydig lösning när $a \neq 1$ och $a \neq 2$.
När $a = 1$ får vi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 2z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & 6z & = & -3 \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array} \right. ,$$

vilket saknar lösning.
När $a = 2$ får vi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & - & 2z & = & 2 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & - & 2z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 4 \end{array} \right. ,$$

vilket också saknar lösning.

3. Gausselimination ger trappmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har 3 pivot element och 4 kolonner blir rangen 3 och nolldimensionen 4-1 = 1.
Nollrummet till A får vi genom att lösa $TX = 0$ vilken har lösningarna

$$X = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En bas till nollrummet blir alltså vektorn $(-2, 1, 0, 0)$. En bas till värderummet får vi genom att plocka ut dom kolonnvektorer där pivåelementen finns från den ursprungliga matrisen, alltså

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

4. a) (i) är inte linjär eftersom

$$F_1(1,0) + F_1(0,1) = (1,0) + (2,0) \neq (3,3) = F(1,1).$$

(ii) är inte linjär eftersom

$$F_2(0,0) = (0,5) \neq (0,0).$$

(iii) är linjär eftersom den kan skrivas med en avbildnings matris som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(iv) är linjär eftersom den kan skrivas med en avbildnings matris som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

b) Låt A vara avbildningsmatrisen. För att kunna multiplicera A med en kolonnvektor $\bar{\mathbf{v}}$ som har m rader måste A ha m kolonner. Resultatet $A\bar{\mathbf{v}}$ ska ha n rader, vilket gör att A blir en $n \times m$ matris.

c) Avbildningsmatrisen A ska uppfylla $AB = C \Leftrightarrow A = CB^{-1}$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi får då

$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $F(\bar{\mathbf{u}}_1) = (1,0)$ ser vi att en lösning till $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ges av $X_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi ser också att en bas till nollrummet till A är $X_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Vi får alltså den allmänna lösningsformeln

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

5. a) Eftersom vektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1 = (2, 1)$ och $\hat{\mathbf{e}}_2 = (-1, 2)$ inte är parallella är dom en bas för planet. Vektorerna har inte längd 1 och därför är inte basen ortonormal.
Basbytesmatrisen blir

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

vilket ger sambandet mellan koordinaterna

$$X = S\hat{X} \Leftrightarrow \hat{X} = S^{-1}X.$$

Vektorn $(3, 1)$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$ får alltså koordinaterna

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.
Vektorn $(1, 1)$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1$,$\bar{\mathbf{e}}_2$ får koordinaterna

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.

b) Vi har

$$\hat{Y} = \hat{A}\hat{X} \Leftrightarrow S^{-1}Y = \hat{A}S^{-1}X \Leftrightarrow Y = S\hat{A}S^{-1}X.$$

Alltså är

$$A = S\hat{A}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) Om $F = G \circ G$ måste avbildningsmatrisen B till G, i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$, uppfylla $A = B^2$. Vi har dessutom att $B = S\hat{B}S^{-1}$ och $A = S\hat{A}S^{-1}$, där $\hat{B}$ är avbildningsmatrisen till G i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.
Vi får alltså

$$A = B^2 \Leftrightarrow S\hat{A}S^{-1} = S\hat{B}\underbrace{S^{-1}S}_{=I}\hat{B}S^{-1} = S\hat{B}^2S^{-1} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}^2.$$

Som lösning till $\hat{A} = \hat{B}^2$ kan vi exampelvis välja

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$B = S\hat{B}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

6. a) Om $\bar{\mathbf{x}} = a\bar{\mathbf{u}}+b\bar{\mathbf{v}}$, där $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ är egenvektorer till A med egenvärde $\lambda \neq 0$ så är

$$A\bar{\mathbf{x}} = A(a\bar{\mathbf{u}} + b\bar{\mathbf{v}}) = aA\bar{\mathbf{u}} + bA\bar{\mathbf{u}} = a\lambda\bar{\mathbf{u}} + b\lambda\bar{\mathbf{v}} = \lambda(a\bar{\mathbf{u}} + b\bar{\mathbf{v}}) = \lambda\bar{\mathbf{x}}.$$

Alltså är linjärkombinationer av $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ egenvektorer med egenvärde λ.

b) Eftersom $\bar{\mathbf{u}}_1$ och $\bar{\mathbf{u}}_2$ har samma egenvärde är alla vektorer i planet som dom spänner upp egenvektorer med egenvärde λ_1.
En normal till planet ges av $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{u}}_1 \times \bar{\mathbf{u}}_2 = (-1,-1,-1) = -\bar{\mathbf{u}}_3$.
Eftersom $\bar{\mathbf{u}}_3$ är parallel med $\bar{\mathbf{n}}$ och därför vinkelrät mot planet som $\bar{\mathbf{u}}_1$ och $\bar{\mathbf{u}}_2$ spänner upp går det att hitta ortogonala egenvektorer till A. Exempelvis kan vi välja $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_1 \times \bar{\mathbf{u}}_3 = (-1,2,-1)$ och $\bar{\mathbf{u}}_3$. Normering av vektorerna ger nu matriserna

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

c) Matrisen $(\eta I - B)$ är inverterbar om $\det(\eta I - B) \neq 0$, alltså när η inte är något av egenvärdena dvs $\eta \neq \lambda_1$ och $\eta \neq \lambda_3$.
Eftersom lösningarna till $(\lambda_i I - B)X = 0$ är egenvektorerna till λ_i får vi att $\bar{\mathbf{u}}_1$, $\bar{\mathbf{u}}_2$ blir en bas för nollrummet när $\eta = \lambda_1$ och $\bar{\mathbf{u}}_3$ blir bas när $\eta = \lambda_3$, vilket också ger rangen 1 när $\eta = \lambda_1$ och 2 när $\eta = \lambda_3$.
För att se vad värderummet blir kan vi använda diagonaliseringen av B.
Om vi multiplicerar med en godtycklig vecktor $\bar{\mathbf{v}}$ får vi

$$(\eta I - A)\bar{\mathbf{v}} = (\eta I - SDS^T)\bar{\mathbf{v}} = S(\eta I - D)\underbrace{S^T\bar{\mathbf{v}}}_{:=\tilde{\mathbf{v}}}$$

Om $\eta = \lambda_1$ blir

$$S(\eta I - D) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Eftersom $S(\eta I - D)\tilde{\mathbf{v}}$ blir en linjärkombination av kolonnerna i $S(\eta I - D)$ vilka alla är parallella med $\bar{\mathbf{u}}_3$ blir $\bar{\mathbf{u}}_3$ en bas för värderummet.
På samma sätt får vi när $\eta = \lambda_3$ att $\bar{\mathbf{u}}_1$ och $\bar{\mathbf{u}}_2$ blir en bas för värderummet.