LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2017-10-23

1. Om vi skriver ekvationssystemet på matrisform $AX = Y$, så vet vi att systemet har en entydig lösning $X = A^{-1}Y$ då $\det A \neq 0$. Om $\det A = 0$ saknas lösning eller så finns det oändligt många lösningar (se boken s. 214).

Vi undersöka därför för vilka a-värden som A:s determinant är noll:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+2) = 0,$$

dvs $\det A = 0$ för $a = 1$ och $a = -2$.

För $a = 1$ fås

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = -1 \\ x + 4y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y + 3z = 0 \\ 0 = 3 \end{cases},$$

dvs lösning saknas.

För $a = -2$ fås

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 2 \\ -2x + 4y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases},$$

dvs det finns oändligt många lösningar $(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Svar: För $a \neq 1, -2$ har ekvationssystemet en entydig lösning, för $a = 1$ saknar systemet lösning och för $a = -2$ har systemet oändligt många lösningar på formen $(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. a) Välj två linjärt oberoende vektorer parallella med planet π, tex $\overline{PQ} = (0,1,2)$ och $\overline{PR} = (-1,-2,-3)$. En normal till planet ges nu av

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = (0,1,2) \times (-1,-2,-3) = (1,-2,1),$$

vilket ger ekvationen $x - 2y + z + D = 0$ för π. Talet D bestäms genom att sätta in en punkt i ekvationen, tex P:

$$1 - 2 \cdot 0 + 2 + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = -3.$$

Vi får således $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$.

b) En punkt $S : (x,y,z)$ som ligger i skärningen mellan π och μ uppfyller

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ \phantom{x -{}} 3y \phantom{{}+z} = -3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}.$$

Planen skär därför i linjen $\ell_0 : (x,y,z) = (1,-1,0) + t(-1,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

c) En riktningsvektor $\bar{\mathbf{v}}$ till ℓ ges av $\bar{\mathbf{v}} = \overline{PQ} = (0,1,2)$. Då P ligger på ℓ kan vi skriva linjen på parameterformen

$$\ell : (x,y,z) = (1,0,2) + t(0,1,2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi bildar nu en vektor $\bar{\mathbf{u}}$ mellan en punkt på ℓ och punkten R, tex $\bar{\mathbf{u}} = \overline{PR} = (-1,-2,-3)$. Om vi delar upp $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}' + \bar{\mathbf{u}}''$ i två komposanter, där $\bar{\mathbf{u}}'$ är parallell med $\bar{\mathbf{v}}$ och $\bar{\mathbf{u}}''$ är vinkelrät mot $\bar{\mathbf{v}}$, fås det kortaste avståndet mellan R och ℓ som $d = |\bar{\mathbf{u}}''|$.

Komposanten $\bar{\mathbf{u}}'$ är den ortogonala projektionen av $\bar{\mathbf{u}}$ på $\bar{\mathbf{v}}$, dvs

$$\bar{\mathbf{u}}' = \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\,\bar{\mathbf{v}} = \frac{(-1,-2,-3) \cdot (0,1,2)}{|(0,1,2)|^2}\,(0,1,2) = \frac{8}{5}(0,-1,-2).$$

Detta ger

$$\bar{\mathbf{u}}'' = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}' = (-1,-2,-3) - \frac{8}{5}(0,-1,-2) = \frac{1}{5}(-5,-2,1)$$

och avståndet blir slutligen

$$d = |(-5,-2,1)/5| = |(-5,-2,1)|/5 = \sqrt{30}/5 \text{ l.e.}$$

Svar:

a) $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$.

b) $\ell_0 : (x,y,z) = (1,-1,0) + t(-1,0,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

c) $\sqrt{30}/5$ l.e.

3. a) Vi beräknar vi först egenvärdena till A genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0,$$

dvs A har egenvärdena $\lambda = 2$ och $\lambda = -3$. För varje egenvärde kan vi nu beräkna motsvarande egenvektorer genom att lösa $(\lambda I - A)X = 0$.

För $\lambda = 2$ får vi

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow X = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

För $\lambda = -3$ får vi

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \end{cases} \Rightarrow X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$$

Eftersom vi kan välja två linjärt oberoende egenvektorer är A diagonaliserbar. Till exempel kan vi välja egenvektorena $(2, 1)$ och $(1, -2)$ vilket leder till diagonaliseringen $A = SDS^{-1}$ med

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Här finns naturligtvis många möjliga lösningar, men en enkel variant är att välja en 4×4-matris G som redan är på trappform med $r = 2$ pivot element, dvs $\operatorname{rang} G = r$ och dimensionssaten ger att

$$\operatorname{nolldim} G = 4 - r = 2.$$

Ett möjligt exempel på denna konstruktion är

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rangen för G blir per konstruktion 2. Kolonnrummet är mängden av alla linjärkombinationer av G:s kolonner, dvs

$$\operatorname{kolonnrum} G = \{X : X = s\,(1\,0\,0\,0)^{\mathrm{T}} + t\,(0\,1\,0\,0)^{\mathrm{T}};\ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Svar: (Till exempel)

a) $A = SDS^{-1}$ med

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Den diagonala 4×4-matrisen med diagonalelementen $1, 1, 0, 0$ har nolldimension 2, rang 2 och kolonnrum $\{X : X = s\,(1\,0\,0\,0)^{\mathrm{T}} + t\,(0\,1\,0\,0)^{\mathrm{T}};\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

4. I uppgiften ska endast svar ges, men för att stödja framtida inlärning bifogar vi en kort motivering.

a) **Falskt:** $\det(A+B) = \det A + \det B$ gäller inte i allmänhet, testa tex med

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) **Sant:** Enligt räknelagarna för kryssprodukten gäller det att

$$F(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}') = (\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}') \times \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{u}}' \times \bar{\mathbf{v}} = F(\bar{\mathbf{u}}) + F(\bar{\mathbf{u}}')$$

och

$$F(\lambda\bar{\mathbf{u}}) = (\lambda\bar{\mathbf{u}}) \times \bar{\mathbf{v}} = \lambda(\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}}) = \lambda F(\bar{\mathbf{u}})$$

för alla vektorer $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}'$ i rummet och $\lambda \in \mathbb{R}$. Således är F linjär.

c) **Sant:** Om $\det A = 0$ så har ekvationssystemet $AX = Y$ antingen ingen eller oändligt många lösningar. För det homogena systemet $AX = 0$ är $X = 0$ alltid en lösning, dvs om $\det A = 0$ så har $AX = 0$ oändligt många lösningar.

d) **Falskt:** Om kolonnvektorerna är linjärt *beroende* så är $\det A = 0$ och ekvationssystemet $AX = Y$ har därför ingen eller oändligt många lösningar.

e) **Falskt:** Låt F beteckna speglingen och G beteckna rotationen. Den sammansatta avbildningen där en vektor först speglas varefter den vrids, dvs $G \circ F$, har avbildningsmatrisen BA vilken inte sammanfaller med matrisen AB. Det senare kan ses genom att testa med $\bar{\mathbf{u}} = (0, 1)$, där $G \circ F(\bar{\mathbf{u}}) = (-1, 0)$ och $F \circ G(\bar{\mathbf{u}}) = (1, 0)$.

Svar: Påståendena b, c är sanna och a, d, e är falska.

5. a) Den första basvektorn $\hat{\mathbf{e}}_1$ ska vara ortogonal mot planet π, dvs parallell med π:s normalriktning (tex) $\bar{\mathbf{n}}_\pi = (2, -2, -1)$. Eftersom $\hat{\mathbf{e}}_1$ ska ha längden ett väljer vi

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{|\bar{\mathbf{n}}_\pi|}\,\bar{\mathbf{n}}_\pi = \frac{1}{3}(2, -2, -1).$$

Den andra basvektorn $\hat{\mathbf{e}}_2$ ska vara ortogonal mot $\hat{\mathbf{e}}_1$ och parallell med planet μ. Således måste $\hat{\mathbf{e}}_2$ vara ortogonal mot både $\hat{\mathbf{e}}_1$ och μ:s normalriktning, tex $\bar{\mathbf{n}}_\mu = (1, 0, -1)$. En sådan vektor ges av

$$\bar{\mathbf{v}} = (2, -2, -1) \times (1, 0, -1) = (2, 1, 2),$$

och vi kan välja

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{|\bar{\mathbf{v}}|}\,\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}(2, 1, 2).$$

Eftersom den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ ska vara positivt orienterad väljer vi

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{9}(2, -2, -1) \times (2, 1, 2) = \frac{1}{9}(-3, -6, 6) = \frac{1}{3}(-1, -2, 2).$$

b) Introducera basbytesmatrisen

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom kolonnvektorerna i S utgör en ortonormerad bas (enligt 5.a) så är S ortogonal och $S^{-1} = S^{\mathrm{T}}$. Koordinatsambandet blir därmed

$$X = S\hat{X} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{X} = S^{-1}X = S^{\mathrm{T}}X$$

(se satsen om basbyten i boken, s. 137). Vi får nu att

$$\hat{X} = S^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vektorn $\bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 0)$ har således koordinaterna $(0, 1, -1)$ med avseende på den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.

5. c) Påståendet att $\bar{\mathbf{u}} = (x_1, x_2, x_3)$ får koordinaterna $(x_3, x_2, -x_1)$ med avseende på den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ kan skrivas på matrisform:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = BX.$$

Ifrån koordinatsambandet $\hat{X} = S^{\mathrm{T}}X$ får vi nu

$$BX = S^{\mathrm{T}}X \quad \Leftrightarrow \quad (B - S^{\mathrm{T}})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} X = 0.$$

Den sista likheten ger ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Detta betyder att alla vektorer $\bar{\mathbf{u}} = (x_1, x_2, x_3)$ som får koordinaterna $(x_3, x_2, -x_1)$ med avseende på den nya basen är på formen $\bar{\mathbf{u}} = t(1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Svar: (Till exempel)

a) $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)$.

b) $\bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 0)$ får koordinaterna $(0, 1, -1)$ i den nya basen.

c) $\bar{\mathbf{u}} = t(1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, är alla vektorer som uppfyller det eftersökta sambandet.

6. a) En matris A sägs vara symmetrisk om $A^{\mathrm{T}} = A$ och ortogonal om A:s kolonnvektorer utgör en ortonormerad bas.

b) Alla vektorer $\bar{\mathbf{x}}$ som är ortogonala mot planet π speglas på $-\bar{\mathbf{x}}$, dvs $F(\bar{\mathbf{x}}) = -1 \cdot \bar{\mathbf{x}}$. Detta ger att $\lambda = -1$ är ett egenvärde till F och motsvarande egenvektorer är $\bar{\mathbf{x}} = t(71, -13, 8)$, $t \neq 0$.

Alla vektorer $\bar{\mathbf{x}}$ som är parallella med π speglas på sig själva, dvs $F(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$. Detta ger att $\lambda = 1$ är ett egenvärde till F och motsvarande egenvektorer är alla $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ som är parallella med π.

Det finns inga flera vektorer $\bar{\mathbf{x}}$ som speglas på $\lambda\bar{\mathbf{x}}$. Därmed finns det inga ytterligare egenvärden eller egenvektorer.

Vi kan nu välja tre egenvektorer till F som utgör en ortonomerad bas (välj en vektor vinkelrät mot π och två med varandra vinkelräta vektorer parallella med π, alla med längd 1). Således är avbildningsmatrisen A diagonaliserbar med en ortogonal matris S och en diagonal matris D med ± 1 på diagonalen. Detta ger att

$$A = SDS^{-1} = SDS^{\mathrm{T}}.$$

Matrisen A är symmetrisk eftersom

$$A^{\mathrm{T}} = (SDS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{TT}}D^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} = SDS^{\mathrm{T}} = A$$

och ortogonal (se boken s. 139) eftersom

$$A^{\mathrm{T}}A = AA = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1} = SS^{-1} = I.$$

Notera att $D^2 = I$ då D bara har ± 1 på diagonalen.

Anmärkning: Det finns en rad andra möjligheter att visa symmetrin och ortogonaliteten hos A. Till exempel, speglingen är en isometrisk avbildning vilket ger att A är en ortogonal matris (se boken s. 174) och därmed är $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$. Vidare gäller att $AA = I \Leftrightarrow A^{-1} = A$ (spegling av en punkt två gånger i π ger samma punkt) vilket innebär att A är symmetrisk eftersom $A^{\mathrm{T}} = A^{-1} = A$.

En tredje variant är att komma ihåg att avbildningsmatrisen har formen

$$A = I - \frac{2}{N^{\mathrm{T}}N}NN^{\mathrm{T}} \quad \text{med} \quad N = \begin{pmatrix} 71 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(se boken s. 172) och sen verifiera att $A^{\mathrm{T}} = A$ och $A^{\mathrm{T}}A = I$.