LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2019-06-01 kl 8–13

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges. INGA HJÄLPMEDEL.

Godkäntdel. För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Bestäm de värden på $k \in \mathbb{R}$ där ekvationssystemet

$$\begin{cases} kx + ky + z = & 3 \\ 2x + ky + z = & 2 \\ 4x + 3y + 3z = & 8 \end{cases}$$

har fler än en lösning och lös ekvationssystemet för dessa värden på k.

2. Låt L vara alla gemensamma punkter till de tre planen $\pi_1 : x + y = 1$, $\pi_2 : x + z = 2$ och $\pi_3 : y - z = -1$. Visa att L är en linje och bestäm minsta avstånd från denna linje till origo.

3. Betrakta matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avgör huruvida raderna i A är linjärt beroende och huruvida raderna i B är linjärt beroende. Lös matrisekvationen

$$AX = B + X.$$

4. Bestäm rangen av A och en bas för nollrummet till A, där A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestäm samtliga egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som speglar en vektor i planet $x - z = 0$ och låt $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som svarar mot vridning kring z-axeln $\pi/2$ radianer i positiv led.
Bestäm avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildning där speglingen åtföljs av vridningen.

Överbetygsdel. På denna del ger minst 4 poäng betyg 4 och minst 7 poäng betyg 5, förutsatt att man har klarat godkäntdelen.

7. Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara parvis ortogonala vektorer (de får antas vara vektorer i $\mathbb{R}^3$).

a) Visa att
$$\|\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 + \|\overline{w}\|^2.$$

b) Om $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ alla har samma längd, visa att de bildar samma vinkel med vektorn $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$.

8. Definiera avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom
$$T(\overline{x}) = \overline{r} \times (\overline{x} \times \overline{r}),$$
där $\overline{r} = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$. Ge en geometrisk tolkning av T.
Ledning: Man kan till exempel beräkna avbildningsmatrisen till T i en lämpligt vald ortonormerad bas. Alternativt kan formeln $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = (\overline{u} \cdot \overline{w})\overline{v} - (\overline{u} \cdot \overline{v})\overline{w}$ användas.

9. Betrakta matrisen A från uppgift 4. Bestäm en bas för värdemängden till den linjära avbildning som definieras genom $T(\overline{x}) = A\overline{x}$.
Vidare, låt $N(T)$ vara nollrummet till T (som du förhoppningsvis redan har från uppgift 4). Definiera *det ortogonala komplementet till* $N(T)$ genom
$$N(T)^\perp = \{\overline{u} \in \mathbb{R}^4 : \overline{u} \cdot \overline{v} = 0 \text{ för alla } \overline{v} \in N(T)\}.$$
Bestäm en bas för $N(T)^\perp$ och visa att varje vektor $\overline{x} \in \mathbb{R}^4$ kan skrivas på ett unikt sätt som $\overline{x} = \overline{u} + \overline{v}$, där $\overline{u} \in N(T)^\perp$ och $\overline{v} \in N(T)$.

10. Låt A vara en $m \times n$-matris, där $m \geq n$. Visa att $A^T A$ är inverterbar om och endast om A har full rang, dvs. om $rang(A) = n$.
Ledning: Använd huvudsatsen och att $(A\overline{x})^T(A\overline{x}) = \overline{x}^T A^T A\overline{x}$.

LYCKA TILL!