LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär algebra
2019 – 05 – 04, kl. 8 – 13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar. Ge tydliga svar där så är möjligt. Om inget annat anges är koordinatsystemen ortonormerade och positivt orienterande. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel. För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Lös för alla värden på a det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 4y + (a+1)z = 0 \\ -x + 2ay - z = 0 \\ x + 8y + z = 0 \end{cases}.$$

2. Bestäm rangen och nolldimensionen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

och ange en bas för nollrummet av A.

3. Lös matrisekvationen $2X + AX = B$ om

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

För vilka tal λ har matrisekvationen $\lambda X + AX = B$ lösning?

4. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Är A diagonaliserbar?

5. a) Bestäm vinkeln mellan planen $4x + y + z = 1$ och $2x + 2y - z = 2$.
b) Visa att om två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ har samma längd, så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ortogonala.

6. Låt $\mathbf{v_1} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$. Ange två vektorer $\mathbf{v_2}$ och $\mathbf{v_3}$ i $\mathbb{R}^3$ så att $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ bildar en ON-bas. Bestäm nya koordinaten under basen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ för vektorn $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$.

Överbetygsdel. Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Låt L vara raka sträckan mellan punkterna $A : (1, 2, 1)$ och $B : (4, -4, 4)$. Beräkna avståndent från punkten $P : (20, 2, 2)$ till sträckan L.

8. Låt **F** och **G** vara två linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$, där **F** är avbildningen "vridning vinkeln $\frac{\pi}{2}$ i positiv led kring z-axeln". Antag att den sammansatta linjära avbildningen $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ överför de tre vektorerna

$$\mathbf{u_1} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{u_2} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{u_3} = (0, 1, 1)$$

på vektorerna $\mathbf{w_1} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{w_2} = (1, 1, 0) \quad \text{respektive} \quad \mathbf{w_3} = (0, 2, 1).$
Bestäm avbildningsmatrisen för **G** .

9. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Visa att om **u** och **v** är två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^2$, så är $A^{50}\mathbf{u}$ och $A^{50}\mathbf{v}$ linjärt oberoende.
b) Bestäm alla egenvektorer till matrisen A^{50}.

10. Antag att $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning med avbildningsmatrisen A.
Definiera avbildningen $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genom $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{v}))$ för all $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
a) Visa att **G** är linjär.
b) Visa att om $A^4 = 0$ så är **G** är inverterbar.

LYCKA TILL !