LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2019–01–19 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Bestäm, för varje värde på talet a, antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax - y + z = -1 \\ -2x + y - z = 2 \\ 4x + 2ay - 2z = -4 \end{cases}.$$

2. Bestäm en ekvation på normalform (dvs. affin form) för planet π som går genom punkterna $(4,2,1)$, $(5,0,2)$ och $(3,4,1)$. Bestäm också den punkt i π som ligger närmast origo, dvs. närmast punkten $(0,0,0)$.

3. Antag att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ är en bas för $\mathbb{R}^2$, och låt

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

Visa att även $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ är en bas för $\mathbb{R}^2$. Bestäm sedan koordinaterna i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ har koordinaterna $(1,1)$.

4. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Lös matrisekvationen $\mathbf{AX} - \mathbf{X} = \mathbf{B}^T$, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $\mathbf{F}$ vara den linjära avbildning som avbildar vektorerna $(1,0)$ och $(1,1)$ på $(2,-3)$ respektive $(3,0)$. Låt vidare $\mathbf{G}$ vara avbildningen som svarar mot att planets vektorer vrids vinkeln $\pi/6$ i positiv led kring origo. Bestäm avbildningsmatrisen för den sammansatta avbildning som innebär att vi först tillämpar $\mathbf{F}$ och därefter $\mathbf{G}$.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Diagonalisera matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

dvs. ange en inverterbar matris $\mathbf{S}$ och en diagonalmatris $\mathbf{D}$ sådana att $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$. Går det att välja $\mathbf{S}$ ortogonal? Gör i så fall det.

8. Antag att $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning med egenskapen att det finns en linjärt oberoende mängd $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ av vektorer i $\mathbb{R}^m$ så att motsvarade vektorer $\mathbf{F}(\mathbf{u}_1), \mathbf{F}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{u}_p)$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende. Visa att det finns en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ sådan att $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Antag nu att $\mathbf{F}$ ovan har avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$. Hur många lösningar har ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

9. Låt T vara triangeln i rummet med hörn $P_1 : (0,0,0)$, $P_2 : (3,1,-1)$ och $P_3 : (1,2,3)$. Avgör vilka av punkterna $Q_1 : (1,1,0)$, $Q_2 : (1,1,1)$ och $Q_3 : (3,3,3)$ som ligger inom triangeln T.

10. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{S}$ vara två matriser av typ $n \times n$, och antag att $\mathbf{S}$ är inverterbar, Låt vidare $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Visa att $\mathbf{A}$ är inverterbar om och endast om $\mathbf{B}$ är inverterbar. Visa också att $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}\mathbf{B}$.

LYCKA TILL!