LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2018–10–29, kl. 8.00–13.00

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med fullständiga motiveringar.

Godkäntdel. För godkänt krävs minst 9 av 18 möjliga poäng på uppgifterna 1–6 samt minst en poäng vardera på alla utom en av uppgifterna 1–6.

1. Beräkna inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Ange för var och ett av följande påståenden om de är sanna eller falska. Lämna endast svar. Uppgiften ger $\max\{r-2, 0\}$ poäng, där r betecknar antalet korrekta svar.

   (a) Om den kvadratiska matrisen A är ortogonal så är det $A = \pm 1$.

   (b) Om A är kvadratisk och $AX = 0$ har entydig lösning, så är A inverterbar.

   (c) Om A är avbildningsmatrisen för en ortogonal projektion på en linje, så är rang $A = 2$.

   (d) Om A och B är två $n \times n$-matriser, så är $(AB)^T = A^T B^T$.

   (e) Om $\boldsymbol{e}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\boldsymbol{e}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\boldsymbol{e}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ och

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

   så är $\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3$ en bas om och endast om det $A \neq 0$.

3. Låt $\pi\colon x + 2y + z = 0$ vara ett plan och $\ell\colon (0, 2, 2) + t(1, 1, 0)$ en linje. Avgör om linjen skär planet, och beräkna i så fall skärningsvinkeln. Beräkna avståndet mellan π och ℓ om ℓ ej skär π.

4. Diagonalisera matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Finn en högerortonormerad bas $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_2 \hat{\boldsymbol{e}}_3$ i rummet, sådan att $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ är ortogonal mot planet $x + y = 1$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ är ortogonal mot linjen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$. Beräkna koordinaterna för $(1, 1, 1)$ i den nya basen.

6. Låt $N \neq 0$ vara en 3×1-matris och låt $A = \frac{NN^T}{N^T N}$.

   Visa att $A^2 = A$ och att $A^T = A$.

   Låt F var den linjära avbildning som har A som avbildningsmatris och låt $\boldsymbol{n}$ vara vektorn svarande mot N. Visa att F är ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\boldsymbol{n}$. Med andra ord, visa att om $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, där $\boldsymbol{x}_1 \parallel \boldsymbol{n}$ och $\boldsymbol{x}_2 \perp \boldsymbol{n}$, så är $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$.

Var god vänd.

Överbetygsdel. För överbetyg krävs godkänt på skrivningens första del samt 4–6 poäng på överbetygsdelen för betyget 4 eller 7–12 poäng för betyget 5.

7. Beräkna volymen av den tetraeder som har sidor som ligger i planen

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x + y + z = 2, \\ \pi_2 &: \quad 2x + y + z = 2, \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + z = 2, \\ \pi_4 &: \quad x + y + 2z = 2. \end{aligned}$$

   Det kan vara till hjälp att rita en figur.

8. Antag att P är en 3×3 matris sådan att $P^2 = P$ och $P^T = P$. Låt F vara den lineära avbildning som har avbildningsmatris P.

   Visa att antingen är $P = I$, $P = 0$ eller så är F en ortogonal projektion på en linje eller ett plan.

9. Låt T vara en triangel med hörn i punkterna $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ och $(1, 1, 2)$. Från en punktformig lampa i punkten $(2, 2, 2)$ sprider sig ljus i alla riktningar. Det uppkommer då en skugga av triangeln på planet $x + y + z = 0$. Beräkna skuggans area.

10. En kvadratisk matris A kallas för nilpotent om det finns ett positivt heltal n sådant att $A^n = 0$.

    Låt A vara nilpotent med n sådant att $A^n = 0$. Härled en formel för $(I - A)^{-1}$ uttryckt i $I, A, \ldots, A^{n-1}$. Om du inte kan härleda en formel för inversen, kan du få poäng för att visa att $I - A$ är inverterbar.

LYCKA TILL!