LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2018-08-29 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Beräkna volymen av den parallellepiped som har kantvektorerna $\bar{\mathbf{v}}_1 = (a, 2, -1)$, $\bar{\mathbf{v}}_2 = (2, 4, -2a)$, $\bar{\mathbf{v}}_3 = (-2, -2, 1)$ för alla värden på a. Lös även det homogena systemet

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2ax_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

för alla värden på a.

2. a) Bestäm ortogonala projektionen av punkten $P : (1, 3)$ på linjen l_1 som går igenom punkterna $P_1 : (-1, 2)$ och $P_2 : (2, -1)$. Beräkna även avståndet mellan l_1 och P. (0.5)

b) Avgör om linjen l_2 som går genom punkten $Q : (4, 5, 2)$ och har riktningsvektor $(2, -2, 4)$ skär planet $\pi : x + 3y - 2z - 3 = 0$ och bestäm i så fall skärningen. (0.5)

3. Låt $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ vara en bas (ej nödvändigtvis ortonormal) för planet och

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = 3\bar{\mathbf{e}}_1 + 4\bar{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = -4\bar{\mathbf{e}}_1 + 3\bar{\mathbf{e}}_2 \end{cases}.$$

Visa att $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ är en bas för planet. Bestäm koordinaterna med avseende på basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som har koordinaterna $(1, 1)$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$. Bestäm även koordinaterna med avseende på basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som har koordinaterna $(1, 1)$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$.

4. a) Lös matrisekvationen

$$(XA^{-1} - B)C = I,$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(0.5)

b) För en given 4×4 matris M och ett visst högerled Y har systemet $MX = Y$ lösningarna

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \; s \in \mathbb{R}.$$

Vilka av följande påstående är sanna respektive falska? (Endast svar krävs. Rätt svar ger +0.1, fel svar -0.1, uteblivet svar ger inget.)

(i) Det finns ett högerled Z sådant att systemet $MX = Z$ saknar lösning.

(ii) $\det(M) \neq 0$.

(iii) $\operatorname{rang}(M) = 2$.

(iv) Vektorn $(-2, 1, 3, 1)$ är en egenvektor till M med egenvärde $\lambda = 0$.

(v) För det karakteristiska polynomet $p_M(\lambda)$ till M gäller $p_M(0) = 0$.

(0.5)

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A samt avgör om A är diagonaliserbar. (0.6)

b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har avbildningsmatrisen A ovan. Låt K_0 vara parallellepipeden med kanterna $\bar{\mathbf{u}}_1 = (1, -1, 2)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (2, 0, 1)$ och $\bar{\mathbf{u}}_3 = (3, -1, 2)$. Genom att avbilda K_0 med F fås den nya parallellepipeden K_1 som i sin tur avbildas med F på K_2 och så vidare. Bestäm volymen av K_n för alla n samt avgör om A^n är inverterbar. (0.4)

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, V_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm rang och nolldimension till A, samt avgör ifall $AX = B$ är lösbart. (0.3)

b) Visa att kolonnvektorerna V_1 och V_2 bildar en ON-bas för kolonnrummet till matrisen A. Dela även upp vektorn B i två vinkelräta komposanter B_1, B_2 så att B_1 ligger i kolonnrummet till A och B_2 är ortogonal mot alla vektorer i kolonnrummet till A. (0.4)

c) Visa att om Y tillhör kolonnrummet till A så är

$$|Y + B_2|^2 = |Y|^2 + |B_2|^2$$

och bestäm det minsta värde som $|AX - B|^2$ kan anta. (0.3)

LYCKA TILL!