LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2018-06-01 kl 08-13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Låt $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$.

a) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på planet $x - y + 2z = 0$. Beräkna även vinkeln mellan denna projektion och vektorn $\mathbf{u}$. Svaret får inte innehålla arcusfunktioner. (0.5)

b) Linjen $\ell\colon (x, y, z) = t\mathbf{u}$ skär planet $\pi\colon x - y + 2z = 3$ i punkten P. Bestäm en ekvation för den linje som ligger i π, går genom P och är vinkelrät mot ℓ. (0.5)

2. a) Formulera huvudsatsen (med sex ekvivalenta påståenden). (0.3)

b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange de värden på a för vilka systemet $Ax = y$ inte är lösbart för alla $y \in \mathbb{R}^3$. För dessa a, bestäm dessutom alla högerled y för vilka systemet går att lösa. (Du behöver inte ange själva lösningen x.) (0.7)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Beräkna inversen till A. (0.4)

b) Lös matrisekvationen $AX + A = BA$. (0.3)

c) Bestäm, om den finns, en linjär avbildning G sådan att om man först avbildar med $F(x) = Ax$ och sedan med G så har sammansättningen avbildningsmatrisen B. (0.3)

Var god vänd!

4. Låt A och B vara matriserna från uppgift 3.

a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till B och diagonalisera matrisen. (0.6)

b) Visa att kolonnvektorerna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ och bestäm en ekvation för linjen $x = y = z$ i den nya basen. (0.4)

5. Låt $\mathbf{w} = (2, 1, 2)$. Visa att avbildningen $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ är linjär och bestäm nollrummet, nolldimensionen, rangen och värdemängden för F.

6. Den linjära avbildningen F är en rotation i rummet kring en viss linje ℓ genom origo. Bestäm ℓ om man vet att

$$F(3, 3, 0) = (3, 0, 3), \quad F(3, 0, 3) = (-1, 1, 4).$$

Bestäm sedan rotationsvinkeln.

LYCKA TILL!