LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2018-04-14 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. a) Bestäm en affin ekvation för planet som innehåller punkterna P_1 : $(-1,-1,-1)$, P_2 : $(-1,0,1)$ och P_3 : $(1,-1,3)$. Beräkna även arean av den triangel som har hörn i P_1, P_2 och P_3 (0.5)

b) Avgör om dom två linjerna

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{och} \quad l_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

skär varandra och beräkna i så fall skärningspunkten. (0.5)

2. Bestäm för varje värde på talet a antalet lösningar till ekvationssytemet

$$\begin{cases} ax - 2z = a \\ 4x + (3-a)y - 2z = a^2 \\ 2x + 2y + 2z = a^3 \end{cases}.$$

3. Bestäm rang, nolldimension, en bas till nollrummet samt en bas för kolonnrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 13 \\ -2 & -4 & -10 & -9 \\ -1 & -2 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. a) Vilka av följande avbildningar är linjära?

(i) $F_1(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1x_2)$.

(ii) $F_2(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2 + 5)$.

(iii) $F_3(x_1,x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2)$.

(iv) $F_4(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2)$.

(Motivering krävs för poäng.) (0.4)

b) Låt F vara en linjär avbildning som avbildar vektorer i $\mathbb{R}^m$ på vektorer i $\mathbb{R}^n$, dvs $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Av vilken typ (storlek) är avbildningsmatrisen? (0.2)

c) Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som avbildar $\bar{\mathbf{u}}_1 = (1,2,0)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (0,-1,2)$ och $\bar{\mathbf{u}}_3 = (1,1,1)$ på $F(\bar{\mathbf{u}}_1) = (1,0)$, $F(\bar{\mathbf{u}}_2) = (0,1)$ respektive $F(\bar{\mathbf{u}}_3) = (1,2)$. Beräkna avbildningsmatrisen till F och bestäm alla vektorer $\bar{\mathbf{v}}$ som uppfyller $F(\bar{\mathbf{v}}) = (1,0)$. (0.4)

5. a) Låt $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ vara en ortonormerad bas i planet och

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \quad 2\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\bar{\mathbf{e}}_1 + 2\bar{\mathbf{e}}_2 \end{cases} .$$

Visa att $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$ är en bas för planet och avgör om den är ortonormerad eller inte. Bestäm koordinaterna i basen $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som har koordinaterna $(1, 1)$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$. Bestäm även koordinaterna i basen $\bar{\mathbf{e}}_1$,$\bar{\mathbf{e}}_2$ för den vektor som har koordinaterna $(3, 1)$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$. (0.4)

b) En linjär avbildning F har avbildningsmatrisen

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

i basen $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$. Bestäm avbildningsmatrisen A till F i basen $\bar{\mathbf{e}}_1$,$\bar{\mathbf{e}}_2$. (0.3)

c) Finns det någon linjär avbildning G sådan att $F = G \circ G$? Bestäm i så fall avbildningsmatrisen till en sådan. (0.3)

6. a) Visa att om $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ är egenvektorer till en matris A med samma egenvärde λ så är alla (nollskilda) linjärkombinationer av $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ också egenvektorer till A. (0.2)

b) Låt

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vara egenvektorer till den symmetriska 3×3 matrisen B, med egenvärden λ_1,λ_2 respektive λ_3. Antag att $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ och bestäm en ortogonal matris S samt en diagonalmatris D så att $B = SDS^T$. (0.4)

c) Avgör för vilka tal η matrisen $(\eta I - B)$ är inverterbar. Bestäm även rangen, en bas för nollrummet och en bas för kolonnrummet till $(\eta I - B)$ för dom η där $(\eta I - B)$ inte är inverterbar. (0.4)

LYCKA TILL!