LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2018-01-08 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. a) Bestäm en ekvation på affin form för planet π som innehåller punkterna $P_1 : (2, 1, -1)$ och $P_2 : (1, 3, 1)$, samt är parallellt med linjen $l : (x, y, z) = (1, 4, -2) + t(0, 1, 1)$. (0.3)

b) Bestäm det kortaste avståndet mellan planet π och linjen l. (0.3)

c) Bestäm det kortaste avståndet mellan punkten P_1 och linjen l. (0.4)

2. Lös, för varje reellt tal a, ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + \ y \ + 2az = 0 \\ x \ - ay + \ z \ = 0 \\ x \ + ay + \ 2z \ = 0 \end{cases} .$$

3. Låt $\mathbf{A}$ vara matrisen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Lös matrisekvationen $\mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{I}$. (0.4)

b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$. (0.4)

c) Diagonalisera $\mathbf{A}$, dvs. ange en matris $\mathbf{S}$ och en diagonalmatris $\mathbf{D}$ sådana att $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. (0.2)

4. a) Bestäm rang, nolldimension samt en bas för nollrummet för matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(0.5)

b) Bestäm rang, nolldimension samt en bas för nollrummet för den 3×3-matris som svarar mot ortogonal projektion på planet $2018x + y + 8z = 0$. Ange även en bas för kolonnrummet. (0.5)

Var god vänd!

5. Antag att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ är en bas i planet, och låt

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = \quad \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2, \end{cases}$$

där a är ett reellt tal.

a) Bestäm alla värden på a sådana att $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ blir en bas i planet. (0.2)

b) Bestäm a så att linjen som har ekvation $x_1 + x_2 = 0$ i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ får ekvation $x_1' = 0$ i basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$. (0.4)

c) Bestäm alla värden på a sådana att det finns oändligt många vektorer som har samma koordinater i de båda baserna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$. (0.4)

6. a) Definiera vad som menas med att en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är linjär. Ge ett exempel på en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som är linjär. Ge även ett exempel på en avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som *inte* är linjär. (0.4)

b) Antag att den linjära avbildningen $\mathbf{F}$ avbildar vektorn $(1, 0, 0)$ på $\frac{1}{3}(2, -1, 2)$, och $(1, 1, 0)$ på $\frac{1}{3}(1, 1, 4)$. Antag vidare att avbildningsmatrisen $\mathbf{A}$ till $\mathbf{F}$ är ortogonal. Bestäm alla möjliga vektorer som vektorn $(1, 1, 1)$ kan avbildas på. (0.6)

LYCKA TILL!