LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2017-10-23 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.
Alla koordinatsystem antas vara ortonormerade och positivt orienterade.

1. Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & -a \\ ax & + & 4y & + & 4z & = & 4 \end{array}\right. .$$

Ange även lösningarna i de fall då det finns oändligt många lösningar.

2. Betrakta punkterna $P : (1, 0, 2)$, $Q : (1, 1, 4)$ och $R : (0, -2, -1)$.

a) Ange en ekvation på affin form för det plan π som innehåller punkterna P, Q och R. (0.3)

b) Bestäm skärningen mellan π i **a)** och planet $\mu : x + y + z = 0$. (0.3)

c) Låt ℓ vara linjen som går igenom punkterna P och Q. Beräkna det kortaste avståndet mellan punkten R och linjen ℓ. (0.4)

3. a) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (0.6)$$

b) Skriv upp en 4×4-matris som har nolldimension 2. Glöm inte att kort redogöra för hur du har tänkt. Ange sedan rangen och kolonnrummet för denna matris. (0.4)

4. På denna uppgift ska endast svar ges. Ange vilka av påståendena som är sanna respektive falska. Varje rätt svar ger 0.2 poäng, varje fel svar ger -0.2 poäng och varje uteblivet svar ger 0.0 poäng. Du kan dock inte få en negativ totalpoäng på uppgiften.

a) För alla $n \times n$-matriser A och B gäller $\det(A + B) = \det A + \det B$.

b) Låt $\bar{\mathbf{v}}$ vara en given vektor i rummet. Den avbildning av rummets vektorer som ges av $F(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}}$ är linjär.

c) Låt A vara en kvadratisk matris. Om $\det A = 0$ så har ekvationssystemet $AX = 0$ oändligt många lösningar.

d) Låt A vara en kvadratisk matris. Om A:s kolonnvektorer är linjärt beroende så har ekvationssystemet $AX = Y$ en entydig lösning för varje Y.

e) Spegling av planets vektorer i y-axeln beskrivs med avbildningsmatrisen A och vridning kring origo, moturs med vinkeln $\pi/2$, med matrisen B. Den sammansatta avbildningen där en vektor först speglas varefter den vrids beskrivs då av matrisen AB.

Var god vänd!

5. a) Konstruera en positivt orienterad och ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är ortogonal mot planet $\pi : 2x - 2y - z = 0$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$ är parallell med planet $\mu : x - z = 0$. (0.4)

b) Vilka koordinater får vektorn $\bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 0)$ med avseende på den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$? (0.2)

c) Ange alla vektorer $\bar{\mathbf{u}} = (x_1, x_2, x_3)$ som får koordinaterna $(x_3, x_2, -x_1)$ med avseende på den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. (0.4)

6. a) Vad menas med att en 3×3-matris A är symmetrisk och ortogonal? (0.2)

b) Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beskriver spegling i planet $\pi : 71x - 13y + 8z = 0$. Vilka egenvärden och egenvektorer har F? Visa att avbildningsmatrisen för F är både symmetrisk och ortogonal. (0.8)

LYCKA TILL!