LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
*Matematik NF*

**Lineär algebra**
**Fredag den 21 mars 2014**
**Skrivtid: 10.15–15.15**

# Lösningar

**1.** Det gäller att

$$A^tA = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^ty = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationerna $A^tAx = A^ty$ har lösningen

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{23}{42} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

vilket är svaret.

**2.** Om $A$ är koefficientmatrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix},$$

så är

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-6-\lambda) - 2\cdot 5 = (\lambda+7)(\lambda-4).$$

Egenvärdena till $A$ är alltså $-7$ och $4$.
Egenvektorerna $x$, som hör till egenvärdet $-7$, ges av

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = t(1,-5),$$

och till egenvärdet 4 ges egenvektorerna $x$ av

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = t(2,1).$$

Lösningen ges därför av

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = c_1 \cdot (-7)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \cdot 4^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

där

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 1 \\ -5c_1 + c_2 = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -1 \quad \text{och} \quad c_2 = 1,$$

d.v.s.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = -(-7)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + 4^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*Var god vänd!*

**3.** En enhetsnormalvektor till planet är $e = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Om vi betecknar speglingen med $S$, och $x = (x_1, x_2, x_3)$ är en vektor i $\mathbf{R}^3$, så är

$$\begin{aligned} S(x) &= x - 2(x|e)e = (x_1, x_2, x_3) - \frac{2}{9}(2x_1 - 2x_2 + x_3)(2,-2,1) \\ &= \frac{1}{9}(x_1 + 8x_2 - 4x_3, 8x_1 + x_2 + 4x_3, -4x_1 + 4x_2 + 7x_3). \end{aligned}$$

Detta visar att matrisen är

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

**4.** Den kvadratiska formens matris är

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

och dess egenvärden ges av

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & -4-\lambda & 3 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & -4-\lambda & 3 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3-\lambda \\ 3 & -4-\lambda & 6 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 3 & 3-\lambda \\ -4-\lambda & 6 \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda+1)(\lambda+6). \end{aligned}$$

Det finns därför en ON-bas $e_1, e_2, e_3$ för $\mathbf{R}^3$ bestående av egenvektorer till $B$ motsvarande egenvärdena 5, $-1$ resp. $-6$ och med avseende på vilken ytans ekvation är

$$5(x_1')^2 - (x_2')^2 - 6(x_3')^2 = 110.$$

Då $(x_1', x_2', x_3')$ är koordinaterna för en punkt på ytan, är

$$\begin{aligned} (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 &= \frac{1}{5}(5(x_1')^2 + 5(x_2')^2 + 5(x_3')^2) \geq \frac{1}{5}(5(x_1')^2 - (x_2')^2 - 6(x_3')^2) \\ &= \frac{1}{5}\cdot 110 = 22 \end{aligned}$$

med likhet bara då $x_1' = \pm\sqrt{22}$, $x_2' = x_3' = 0$. Vi bestämmer egenvektorerna till egenvärdet 5 och finner att vi kan välja $e_1 = \frac{1}{\sqrt{22}}(3,2,3)$. De punkter på ytan, som ligger närmast origo, är alltså $\pm(3,2,3)$. Eftersom ekvationens högerled är positivt och ett egenvärde är positivt och två är negativa, så är ytan en tvåmantlad hyperboloid.

**5.** Se boken.

**6.** Om $U = \{0\}$, så är påståendet trivialt. Fixera annars en vektor $0 \neq v \in U$ och kalla dess egenvärde för $\lambda$. Låt $u \neq 0$. Om $u$ och $v$ är parallella, så är $Fu = \lambda u$. Antag i annat fall att egenvärdet för $u$ är $\mu$ och att egenvärdet för $u + v$ är $\nu$. Då är

$$\nu u + \nu v = \nu(u+v) = F(u+v) = Fu + Fv = \mu u + \lambda v,$$

vilket ger att $(\mu - \nu)u = (\nu - \lambda)v$. Eftersom $u$ och $v$ inte är parallella, så är $\mu = \nu$ och $\nu = \lambda$, vilket ger att $\mu = \lambda$. Detta visar att $Fu = \lambda u$ också i detta fall.