LUNDS UNIVERSITET

Lineär algebra
Onsdag den 30 oktober 2013
Skrivtid: 10.15–15.15

Matematikcentrum
Matematik NF

Lösningar

1. Vi använder normalekvationerna med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$A^t A = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^t y = \begin{bmatrix} 30 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix},$$

och lösningen till ekvationssystemet

$$A^t A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^t y$$

är

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{9}{10}, \quad c = \frac{23}{10}.$$

Svar: $\dfrac{5t^2 + 9t + 23}{10}$.

2. Det karakteristiska polynomet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

är

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Man finner att lösningarna till systemen $(A - E)x = 0$ och $(A - 5E)x = 0$ ges av $x = t(1, -1)$ respektive $x = t(1, 3)$. En bas av egenvektorer är därför $(1, -1), (1, 3)$, där den första vektorn hör till egenvärdet 1 och den andra till egenvärdet 5. Den allmänna lösningen till systemet av rekursionsekvationer är därför

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 5^n \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Begynnelsevillkoret ger att

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

och lösningen till detta ekvationssystem är $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.

Svar: $(a_n, b_n) = (1, -1) + 2 \cdot 5^n (1, 3)$.

Var god vänd!

3. En ortonormerad bas för linjen är vektorn $e = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$. Den ortogonala projektionen av vektorn $x = (x_1, x_2, x_3)$ på e är

$$\begin{aligned}(x|e)e &= \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 - 2x_3)(1, 2, -2)\\ &= \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + 4x_2 - 4x_3, -2x_1 - 4x_2 + 4x_3).\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

4. **a)** Att avbildningen är en isometri är ekvivalent med att matrisen är ortogonal. Vi ser att den andra och tredje kolonnen är ortogonala och har längden 1. Därför är avbildningen en isometri om och endast om den första kolonnen är ortogonal mot de övriga två kolonnerna och har längden 1. Ortogonalitetsvillkoret innebär att

$$\begin{cases} -4a + 4b + 7c = 0 \\ 8a + b + 4c = 0 \end{cases}.$$

Detta system har lösningarna $(a, b, c) = t(1, 8, -4)$. Att längden av den första kolonnvektorn är 1 är nu ekvivalent med att

$$\frac{\sqrt{1^2 + 8^2 + (-4)^2}}{9}|t| = 1,$$

vilket betyder att $t = \pm 1$.
Svar: $(a, b, c) = \pm(1, 8, -4)$.

b) Villkoret för att avbildningen är en rotation är att den är en isometri och att dess determinant är lika med 1. Vi beräknar determinanten som motsvarar $t = 1$ och finner att den är lika med 1. På grund av determinantens linearitet med avseende på den första kolonnen får man determinanten -1 då $t = -1$. Det gäller alltså att $a = 1$, $b = 8$ och $c = -4$. Kallar vi matrisen för A, får vi rotationsaxeln genom att lösa ekvationssystemet $Ax = x$. Detta ekvationssystem har lösningen $x = t(1, 2, 2)$. Sätt $u = (1, 2, 2)$. En vektor som är ortogonal mot u är $v = (0, 1, -1)$. Det gäller att $Av = w = \frac{1}{3}(-4, 1, 1)$. Vi ser att v och w är ortogonala, vilket innebär att rotationsvinkeln är $\frac{\pi}{2}$. Determinanten av matrisen vars kolonner är u, v och w i den ordningen är positiv.
Svar: $a = 1$, $b = 8$, $c = -4$. Rotationsaxeln är linjen som genereras av vektorn $u = (1, 2, 2)$, rotationsvinkeln är $\frac{\pi}{2}$ och rotationen sker moturs kring rotationsaxeln sett från spetsen av u.

5. Se boken.

6. Vi diagonaliserar den kvadratiska formen i den första ekvationens vänsterled. Vi skall då lösa ekvationen

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

och börjar med att addera den första raden till den andra. Det följer sedan ganska enkelt att de sökta egenvärdena är 9 (dubbelt) och 0 (enkelt). En egenvektor som svarar mot det sista egenvärdet är $e_3' = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$. Utvidgar vi till en ortonormerad bas e_1', e_2', e_3' för $\mathbf{R}^3$ av egenvektorer, kan den första ekvationen skrivas

$$9x_1'^2 + 9x_2'^2 = 1.$$

Eftersom $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$, kan den andra ekvationen skrivas

$$9x_1'^2 + 9x_2'^2 + 9x_3'^2 = 1.$$

Skärningen bestäms av $x_3' = 0$ och $x_1'^2 + x_2'^2 = \frac{1}{9}$, vilket visar att den är en cirkel med radien $\frac{1}{3}$ och ligger i planet $x_3' = 0$, d.v.s. i ortogonalplanet

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

till egenvektorn e_3'.

Svar: Cirkeln har radien $\frac{1}{3}$ och ligger i planet $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.