Tentamensskrivning
Lineär algebra
Onsdag den 19 november 2014
Skrivtid: 8.00–13.00

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for an English translation.

För att deltaga i tentamen måste man vara registrerad på kursen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna figur i förekommande fall.

1. Ange den linje $y = at + b$ som i minsta kvadratmening ansluter bäst till punkterna $(t, y) = (1, 1)$, $(t, y) = (2, 3)$, $(t, y) = (3, 6)$ och $(t, y) = (4, 6)$.

2. En lineär avbildning F från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ har följande egenskaper:

$$\begin{array}{rcl} F(1,1,1) & = & (3,4,2) \\ F(1,-1,1) & = & (1,2,-2) \\ F(0,0,1) & = & (0,0,1) \end{array} .$$

Bestäm matrisen för F med avseende på standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

3. Bestäm en ortonormerad bas för nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm den första raden a_1,a_2,a_3 och det reella talet c så att cA blir matrisen för en ortogonal spegling i ett plan och bestäm även planet.

5. Betrakta andragradsytan

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz = 2.$$

Bestäm ytans typ och beräkna det maximala avståndet och det minimala avståndet till origo från en punkt på ytan.

6. Bestäm rangen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

för alla reella tal x.

Written Examination
Linear Algebra
Wednesday 19 November 2014
Duration: 8:00–13:00

LUND UNIVERSITY

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

In order to sit the examination you must be enrolled in the course. No aids are allowed. Use the paper of the department and write on one side of each sheet only. Fill in the cover completely and write your initials on every paper you hand in. Give concise and short arguments and draw figures when applicable.

1. Find the line $y = at + b$ that is the best least squares fit to the points $(t, y) = (1, 1)$, $(t, y) = (2, 3)$, $(t, y) = (3, 6)$ and $(t, y) = (4, 6)$.

2. A linear map F from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$ has the following properties:

$$\begin{array}{rcl} F(1,1,1) &=& (3,4,2) \\ F(1,-1,1) &=& (1,2,-2) \\ F(0,0,1) &=& (0,0,1) \end{array}.$$

Determine the matrix of F with respect to the standard basis for $\mathbb{R}^3$.

3. Find an orthonormal basis for the kernel of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Let A be the matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine the first row a_1,a_2,a_3 and the real number c so that the matrix cA becomes the matrix of an orthogonal reflection in a plane and find the plane of reflection.

5. Consider the second–order surface

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz = 2.$$

Determine the type of the surface and find the minimum distance and the maximum distance to the origin from a point on the surface.

6. Determine the rank of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

for all real numbers x.