LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamensskrivning
Lineär algebra
Onsdag den 29 oktober 2014
Skrivtid: 8.00–13.00

Turn the page for an English translation.

För att deltaga i tentamen måste man vara registrerad på kursen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna figur i förekommande fall.

1. En lineär avbildning F från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^3$ ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en bas för nollrummet $N(F)$ och en bas för värderummet $V(F)$.

2. Ange den linje $y = at + b$ som i minsta kvadratmening ansluter bäst till punkterna $(t, y) = (-1, 2)$, $(t, y) = (0, 2)$, $(t, y) = (1, 1)$ och $(t, y) = (2, 0)$.

3. Bestäm en ortonormerad bas för planet som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v_2} = (3, 1, 1)$. Utvidga denna bas till en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^3$.

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm det reella talet c så att matrisen cA blir en rotationsmatris. Ange rotationsaxeln och rotationsvinkeln.

5. Bestäm maximi- och minimivärdet av den kvadratiska formen

$$Q(x, y, z) = 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz$$

då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Bestäm rangen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

för alla reella tal x.

LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra
Wednesday 29 October 2014
Duration: 8:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text

In order to sit the examination you must be enrolled in the course. No aids are allowed. Use the paper of the department and write on one page only. Fill in the cover completely and write your initials on every paper you hand in. Give concise and short arguments and draw figures when applicable.

1. A linear map F from $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^3$ is given by the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determine a basis for the kernel of F and a basis for the range of F.

2. Find the line $y = at + b$ that is the best least squares fit to the points $(t, y) = (-1, 2)$, $(t, y) = (0, 2)$, $(t, y) = (1, 1)$ and $(t, y) = (2, 0)$.

3. Find an orthonormal basis for the plane spanned by the vectors $\mathbf{v_1} = (1, 1, 0)$ and $\mathbf{v_2} = (3, 1, 1)$. Extend this basis to an orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

4. Let A be the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine the real number c such that the matrix cA becomes the matrix of a rotation. Find the rotation axis and rotation angle.

5. Find the maximum and minimum value of the quadratic form

$$Q(x, y, z) = 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 2yz$$

when $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Determine the rank of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

for all real numbers x.