LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Lineär algebra
Tisdag den 26 augusti 2014
Skrivtid: 08.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for an English translation.

För att deltaga i tentamen måste man vara registrerad på kursen. Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna figur i förekommande fall.

1. Ange en bas för nollrummet $N(A)$ och en bas för värderummet $V(A)$ till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Låt U vara det underrum till $\mathbf{R}^4$, som genereras av de båda vektorerna $(1,1,1,1)$ och $(1,1,1,-1)$. Ange den ortogonala projektionen på U av vektorn $u = (2,4,6,8)$. Ange också det minsta avståndet från en vektor i U till u.

3. En yta i $\mathbf{R}^3$ har, med avseende på standardbasen, ekvationen

$$x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1.$$

Bestäm ytans typ, och ange de punkter på ytan, som har minst avstånd till origo.

4. En lineär avbildning F på ett euklidiskt rum har, med avseende på en ortonormerad, positivt orienterad bas, matrisen

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Visa att F är en rotation kring en linje. Bestäm ekvationen för linjen, cosinus av rotationsvinkeln och åt vilket håll rotationen sker.

5. Härled normalekvationerna.

6. Lös rekursionsproblemet

$$a_{n+3} = -2a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n, \quad a_0 = -2,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1.$$

Börja t.ex. med att införa $b_n = a_{n+1}$, $c_n = a_{n+2}$ och uttrycka a_{n+1}, b_{n+1} och c_{n+1} med hjälp av a_n, b_n och c_n.

LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra
Tuesday 26 August 2014
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

In order to sit the examination you must be enrolled in the course. No aids. Use the papers of the department and write on one page only. Fill in the cover completely and write your initials on each sheet. Write legibly. Give concise and short arguments and draw figures when applicable.

1. Determine a basis for the null space $N(A)$ and a basis for the image space $V(A)$ of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Let U be the subspace of $\mathbf{R}^4$ that is generated by the two vectors $(1,1,1,1)$ and $(1,1,1,-1)$. Determine the orthogonal projection onto U of the vector $u = (2,4,6,8)$. Also find the least distance from a vector in U to u.

3. A surface in $\mathbf{R}^3$ has, with respect to the standard basis, the equation

$$x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1.$$

Determine the type of the surface and find the points on the surface that are closest to the origin.

4. A linear transformation F on a Euclidean space has, with respect to an orthonormal, positively oriented basis, the matrix

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Show that F is a rotation around a line. Determine the equation of that line, the cosine of the angle of rotation and the direction of the rotation.

5. Derive the normal equations.

6. Solve the recurrence problem

$$a_{n+3} = -2a_{n+2} + a_{n+1} + 2a_n, \quad a_0 = -2,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1.$$

Begin e.g. by introducing $b_n = a_{n+1}$, $c_n = a_{n+2}$ and expressing a_{n+1}, b_{n+1} and c_{n+1} in terms of a_n, b_n och c_n.