LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Lineär algebra
Lördag den 5 april 2014
Skrivtid: 08.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for an English translation.

För att deltaga i tentamen måste man vara registrerad på kursen. Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna figur i förekommande fall.

1. Ange en bas för nollrummet $N(A)$ och en bas för värderummet $V(A)$ till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Låt U vara det underrum till $\mathbf{R}^4$, som genereras av de båda vektorerna $(1,1,1,1)$ och $(1,-1,1,-1)$. Ange den ortogonala projektionen på U av vektorn $u = (2,4,6,8)$. Ange också det minsta avståndet från en vektor i U till u.

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) + 9x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 5 \\ x_3(0) = 8 \end{cases}.$$

4. En lineär avbildning F på ett euklidiskt rum har, med avseende på en ortonormerad bas, matrisen

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Visa att F är ortogonal spegling i ett plan, och bestäm ekvationen för detta plan.

5. Formulera och bevisa Cauchy–Schwarz olikhet.

6. Låt a, b och c vara nollskilda reella tal, och visa att ekvationen

$$ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3 = 1$$

är ekvationen för en hyperboloid. Ange villkor på a, b och c för att hyperboloiden skall vara enmantlad respektive tvåmantlad.

LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra
Saturday 5 April 2014
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

In order to sit the examination you must be enrolled in the course. No aids. Use the papers of the department and write on one page only. Fill in the cover completely and write your initials on each sheet. Write legibly. Give concise and short arguments and draw figures when applicable.

1. Determine a basis for the null space $N(A)$ and a basis for the image space $V(A)$ of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Let U be the subspace of $\mathbf{R}^4$ that is generated by the two vectors $(1, 1, 1, 1)$ and $(1, -1, 1, -1)$. Find the orthogonal projection onto U of the vector $u = (2, 4, 6, 8)$. Also find the least distance from a vector in U to u.

3. Solve the initial condition problem

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) + 9x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 5 \\ x_3(0) = 8 \end{cases}.$$

4. A linear transformation F on a Euclidean space has, with respect to an orthonormal basis, the matrix

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Show that F is an orthogonal reflexion in a plane and determine the equation of this plane.

5. State and prove the Cauchy–Schwarz inequality.

6. Let a, b and c be non-zero real numbers and prove that the equation

$$ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3 = 1$$

is the equation of a hyperboloid. State conditions on a, b and c in order that the hyperboloid be of one sheet and two sheets, respectively.