Tentamensskrivning
Lineär algebra
Fredag den 21 mars 2014
Skrivtid: 10.15–15.15

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for an English translation.

För att deltaga i tentamen måste man vara registrerad på kursen. Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna figur i förekommande fall.

1. Ange den kolonnvektor $x \in \mathbf{R}^3$, för vilken avståndet $|Ax - y|$ är så litet som möjligt, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Lös rekursionsproblemet

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 5a_n - 6b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 6 \end{cases}.$$

3. Bestäm matrisen för ortogonal spegling i planet $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ med avseende på standardbasen i $\mathbf{R}^3$.

4. En yta i $\mathbf{R}^3$ har, med avseende på standardbasen, ekvationen

$$x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 = 110.$$

Ange ytans typ. Ange också de punkter på ytan, som ligger närmast origo.

5. Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll.

6. Låt F vara en lineär avbildning på ett lineärt rum U och antag att alla nollskilda vektorer $u \in U$ är egenvektorer till F. Visa att F är en skalär multipel av den identiska avbildningen, d.v.s. att det finns ett tal λ, sådant att $Fu = \lambda u$ för alla $u \in U$.

Written Examination
Linear Algebra
Friday 21 March 2014
Duration: 10:15–15:15

LUND UNIVERSITY

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

In order to sit the examination you must be enrolled in the course. No aids. Use the papers of the department and write on one page only. Fill in the cover completely and write your initials on each sheet. Write legibly. Give concise and short arguments and draw figures when applicable.

1. Determine the column vector $x \in \mathbf{R}^3$ for which the distance $|Ax - y|$ is as small as possible where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Solve the recurrence problem

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 5a_n - 6b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 6 \end{cases}.$$

3. Determine the matrix of orthogonal reflexion in the plane $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ with respect to the standard basis for $\mathbf{R}^3$.

4. A surface in $\mathbf{R}^3$ has, with respect to the standard basis, the equation

$$x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 = 110.$$

Determine the type of the surface. Also find the points on the surface that are closest to the origin.

5. Show that a square matrix is invertible if and only if its determinant is non-zero.

6. Let F be a linear transformation on a linear space U and assume that all non-zero vectors $u \in U$ are eigenvectors of F. Show that F is a scalar multiple of the identity map, i.e. that there is a number λ such that $Fu = \lambda u$ for all $u \in U$.