LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2018-03-12 kl 14-19

1. a) Triangelns area är en halv av parallellograms area som spänns upp av t.ex. $\overline{P_1P_2} = (0, 2, 1)$ och $\overline{P_1P_3} = (3, 0, 1)$, således

$$\text{area av } \Delta P_1P_2P_3 = \frac{1}{2}|(0, 2, 1) \times (3, 0, 1)| = \frac{1}{2}|(2, 3, -6)| = \frac{\sqrt{49}}{2} = \boxed{\frac{7}{2}}.$$

Cosinus av vinkeln α mellan $\overline{OP_1}$ och $\overline{OP_2}$ kan beräknas m.h.a. skalärprodukt

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2}}{|\overline{OP_1}||\overline{OP_2}|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (0, 2, 2)}{1 \cdot \sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Detta cosinusvärde för vinklar i $[0, \pi]$ motsvarar $\alpha = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

b) Planet genom P_1, P_2 och P_3 har normalvektor t.ex. $\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = (2, 3, -6)$ (den har vi räknat i deluppgift a)). Planet π_1 är parallellt med detta plan, alltså har samma normalvektor, och ekvationen blir

$$2x + 3y - 6z + D = 0.$$

För att bestämma D sätter vi punkten $(1, 0, 1)$ in

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + D = 0 \qquad \Rightarrow \qquad D = 4.$$

Svar: $\boxed{2x + 3y - 6z + 4 = 0}$.

c) Ekvationen på parameterform för π_2 kan omskrivas på affin form

$$t = x, \quad s = \frac{y}{2} \qquad \Rightarrow \qquad z = t + s = x + \frac{y}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2x + y - 2z = 0.$$

Skärningen mellan två icke-parallella plan är en linje som kan fås som lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6z &= -4, \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z &= 0 \\ \quad\; 2y - 4z &= -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2z - y = 2 \Leftrightarrow x = 1, \\ y = -2 + 2z = -2 + 2t, \\ z = t. \end{cases}$$

Svar: $\boxed{(x, y, z) = (1, -2, 0) + t(0, 2, 1)}$.

<u>Alternativlösning:</u> Sätt $x = t$, $y = 2s$, $z = t + s$ in i ekvationen för π_1

$$2t + 3 \cdot 2s - 6(t + s) + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Sätt nu $t = 1$ i ekvationen för π_2

$$(x, y, z) = (1, 2s, 1 + s).$$

Det är samma linje (med en annan parameter $s = t - 1$).

2. a) För att bestämma egenvärdena löser vi

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1}.$$

Egenvektorerna får man som nollskillda lösningar till motsvarande ekvationssystem $(\lambda I - A)X = 0$, $X \neq 0$.

$\underline{\underline{\lambda = 1}}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (t \neq 0).$$

$\underline{\underline{\lambda = -1}}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \neq 0).$$

Nu plockar vi ut egenvärdena till D och basegenvektorerna ($t = 1$) till S i samma ordning

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kontrollera att S är inverterbar: $\det S = 1$, OK!

b) Egenvärdena till A är 1 och a, alltså om $a \neq 1$ är matrisen garanterat diagonaliserbar enligt teorin (Sats 3, sid 255). För $a = 1$ kan saker hända, så vi måste räkna egenvektorer och kolla om vi får två stycken linjärt oberoende eller inte

$$(1 \cdot I - A)X = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (t \neq 0).$$

Nej, egenvektorer bildar bara en linje, d.v.s. det går inte att plocka ut två linjärt oberoende. Alltså för $a = 1$ är A inte diagonaliserbar.
Svar: $\boxed{\text{ja, } a = 1}$.

<u>Alternativlösning:</u> det går att göra liknande beräkningar till dessa i a), fast med parametern a. $\lambda = 1$ ger exakt samma egenvektorer, och för $\lambda = a$ har vi

$$\begin{bmatrix} a-1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)x - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ (a-1)t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ a-1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

är inte inverterbar $\Leftrightarrow \det S = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

3. a) Vi eliminerar A till en trappform

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix}.$$

Här i steg 2 byt vi den andra och den tredje raderna. Trappformen har *tre* stycken pivåelementen och *en* övrig kolonn, således, $\boxed{\text{rang}=3}$ och $\boxed{\text{nolldim}=1}$. För att bestämma en bas till nollrummet bestämmer vi nollrummet först

$$AX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 & = 0, \\ x_3 & = 0, \\ -2x_4 & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 & = -2x_2 = -2t, \\ x_2 & = t, \\ x_3 & = 0, \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

En bas till nollrummet är t.ex. $\boxed{X = (-2, 1, 0, 0)}$ (dvs då $t = 1$).

b) Vi provar att köra algoritmen på matrisform. Om vi misslyckas på vägen är matrisen inte inverterbar. Första tre steg är i princip identitska med första tre steg i deluppgift a).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Svar: A är inverterbar och inversen är

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. a) Vi söker x, y, z sådana att $(1, 2, 3) = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3$. Det motsvarar ekvationssystemet (OBS att vektorerna är kolonner!)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lös systemet på din favoritsätt t.ex. i matrisform med högerledet efter sträckan (se sid 150)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 1, \\ y & = \frac{1-(-1)}{2} = 1, \\ z & = -1. \end{cases}$$

Svar: $\boxed{(1, 2, 3) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3}$.

b) M.h.a. deluppgift a) och definitionen för en linjär avbildning (sid 162) kan man skriva

$$F(1,2,3) = F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) - F(\mathbf{u}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

c) Vid en linjär avbildning ändras volymer med faktorn $|\det A|$, alltså

$$V(M) = |\det A| \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) = 6|\det A|.$$

Tre givna vektorsambanden

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som definierar F kan skrivas som ett matrissamband

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{=C}.$$

I princip kan man beräkna $A = CB^{-1}$ och sedan beräkna $\det A$, men det inte är tillåtet i uppgiften.
Vi behöver ju ingen A, utan bara $\det A$, och det kan beräknas t.ex. med produktregeln för determinanter

$$\det A \cdot \det B = \det C \quad \Rightarrow \quad \det A = \frac{\det C}{\det B}.$$

Beräkna determinanterna med ert favoritsätt, t.ex. Sarrus regel. Här använder vi utveckling efter rad/kolonn och eliminering.

$\det C$: utveckla efter den 2:a raden

$$\det C = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

$\det B$: använd eliminering (3:e rad=3:e rad−1:a rad) och sedan utveckla efter den 3:e raden

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (4-3) = -2.$$

Således, $V(M) = \frac{8}{2} \cdot 6 = \boxed{24}$.

Ekvivalent lösning är att notera att volymerna vid en linjär avbildning ändras med samma faktor, och ställa upp proportionen för parallellogramsvolymerna som

$$\frac{V(F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2), F(\mathbf{u}_3))}{V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)} = \frac{V(M)}{6}.$$

5. a) Enligt huvudsatsen är vektorerna linjärt beroende om och endast om determinanten nedan är noll, d.v.s.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 6 - a - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2) = 0.$$

Svar: $\boxed{a = 2 \text{ och } a = -3}$.

b) Först skall vi bestämma 3×3 avbildningsmatrisen för F och skall se hur den kan användas för att bilda 2×2 matrisen för G.

$\boxed{1.}$ Spegling i $x - y - z = 0$: normalvektor t.ex. $n = (1, -1, -1)$ och speglingen ges av

$$y = x - 2\frac{n \cdot x}{|n|^2} n = A_{speg} x$$

där

$$A_{speg} = I - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2.}$ Projektion på xy-planet (som har ekvation $z = 0$): det är bara att nollställa z-koordinaten eller

$$e_1 \mapsto e_1, \quad e_2 \mapsto e_2, \quad e_3 \mapsto 0.$$

Avbildningsmatrisen för projektionen blir då

$$A_{proj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3.}$ F är sammansättningen av dessa två, så blir A_F en produkt (i rätt ordning!)

$$A_F = A_{proj} A_{speg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{4.}$ Avbildningen G fungerar så här

$$G\colon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \overset{F}{\mapsto} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}.$$

Vi redan vet hur F fungerar

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix} = A_F \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tag bort den sista nollraden för att få

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A_G} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

6. a) Normera **u** för att få

$$\mathbf{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \parallel \mathbf{u}.$$

Här kan man ta "minus denna" som också blir rätt. För att få $\mathbf{e}_2' \parallel xy$-planet måste z koordinaten av $\mathbf{e}_2'$ vara noll. Dessutom måste $\mathbf{e}_2' \perp \mathbf{e}_1'$, d.v.s. $\mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_1' = 0$. En sådan vektor är t.ex.

$$\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

(eller igen "minus denna" rätt). Den sista vektor bestäms entydigt som

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

b) Eftersom origo ligger i xz-planet kommer den att ligga även i bildplanet (linjära avbildningar avbildar origo på origo, se Exempel 6, sid 165). Alltså för att lösa uppgiften skall man bestämma vart en normaltvektor till xz-planet (t.ex. $(0, 1, 0)$) hamnar efter rotationen.

Byt den gamla HON-basen till den nya HON-basen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ från delupgift a). I den nya basen är avbildningen en rotation kring (den nya) x'. Avbildningsmatris är då

$$A' = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3)\\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

Sambandet mellan avbildningsmatriser i olika baser ges av $A = SA'S^{-1}$ (se Sats 6, sid 185) där $S = [\mathbf{e}_1'\ \mathbf{e}_2'\ \mathbf{e}_3']$ är basbytematrisen (kolonnerna är koordinaterna för de nya basvektorerna i den gamla basen). Vidare är det ON till ON basbyte, vilket är ekvivalent med att S är ortogonal matris, eller att $S^{-1} = S^T$. Vi skall nu räkna bilden på $(0, 1, 0)$ som vi betecknar med n. Eftersom

$$n = A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = SA'S^T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

beräknar vi den i tre steg (multiplicerar med S^T, sedan resultatet med A', sedan resultatet med S)

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \overset{S^T}{\mapsto} \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix} \overset{A'}{\mapsto} \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}\\-/\sqrt{6}\end{bmatrix} \overset{S}{\mapsto} \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}.$$

Svar: $\boxed{x - 2y - 2z = 0}$.