LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2018-03-12 kl 14-19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Låt O vara origo. Betrakta punkterna $P_1 : (0,0,1)$, $P_2 : (0,2,2)$ och $P_3 : (3,0,2)$.

a) Bestäm arean av triangeln $P_1P_2P_3$. Bestäm även vinkeln mellan $\overline{OP_1}$ och $\overline{OP_2}$. Svaret får inte innehålla arcusfunktioner. (0.4)

b) Bestäm en ekvation på affin form för det plan π_1 som innehåller punkten $(1,0,1)$ samt är parallellt med planet genom P_1, P_2 och P_3. (0.3)

c) Bestäm skärningen mellan planet π_1 från b) och planet $\pi_2 : (x,y,z) = (t, 2s, t+s)$, $t, s \in \mathbb{R}$. (0.3)

2. Låt a vara ett reelt tal och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

a) Sätt $a = -1$. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer samt diagonalisera A för detta värde på a, d.v.s. ange en matris S och en diagonalmatris D sådana att $D = S^{-1}AS$. (0.7)

b) Finns det något värde på a sådant att A inte är diagonaliserbar? (0.3)

3. Definiera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm rang, nolldimension och en bas för nollrummet för A. (0.5)

b) Låt B vara den 3×3-matris man får då man från A tar bort den andra kolonnen. Avgör om B är inverterbar och beräkna i så fall dess invers. (0.5)

Var god vänd!

4. Låt

$$\mathbf{u}_1 = (2,1,2), \quad \mathbf{u}_2 = (2,3,4), \quad \mathbf{u}_3 = (3,2,3),$$

och betrakta en linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$F(\mathbf{u}_1) = (2,0,0), \quad F(\mathbf{u}_2) = (1,0,4), \quad F(\mathbf{u}_3) = (3,1,1).$$

Lös uppgifterna nedan *utan att beräkna avbildningsmatrisen* för F.

a) Uttryck $(1,2,3)$ som en linjär kombination av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$. (0.3)

b) Bestäm $F(1,2,3)$. (0.3)

c) Ett rätblock med sidolängderna 1, 2 och 3 avbildas av F på en mängd M. Bestäm volymen av M. (0.4)

5. a) För vilka reella tal a är vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1,-1,0), \quad \mathbf{u}_2 = (2,1,a), \quad \mathbf{u}_3 = (1,a,2)$$

linjärt beroende? (0.3)

b) Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som erhålles genom att man först speglar i planet $x-y-z=0$, och därefter projicerar ortogonalt på xy-planet. Alice inser att F avbildar xy-planet på sig själv, d.v.s. hon kan konstruera en avbildning $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genom att för varje $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ta motsvarande $(x,y,0) \in \mathbb{R}^3$ och avbilda med F. Bilden ligger igen i xy-planet och kan beskrivas med endast två koordinater. Hjälp Alice att bestämma avbildningsmatrisen för G. (0.7)

6. Låt $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

a) Konstruera en ny positivt orienterad ortonormerad bas $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ sådan att $\mathbf{e}_1'$ är parallell med $\mathbf{u}$, samt $\mathbf{e}_2'$ är parallell med xy-planet. (0.3)

b) Låt F vara rotation med vinkeln $\dfrac{\pi}{3}$ kring vektorn $\mathbf{u}$, moturs sett från spetsen av $\mathbf{u}$. Bestäm en ekvation för det plan som är bilden av xz-planet. (0.7)

LYCKA TILL!